

Relationen und Ränder

von

Klaus Pasedach

aus

Ludwigshafen am Rhein



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Relationen und Ränder

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt
von
Klaus Pasedach
aus
Ludwigshafen am Rhein

Als Dissertation genehmigt von der Naturwissenschaft-
lichen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg.



Tag der mündlichen Prüfung: 24. 7. 1968

Dekan: Professor Dr. W. Haupt

Erstberichterstatter: Professor Dr. H. Bauer

Zweitberichterstatter: Professor Dr. K. Jacobs

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Vorwort	2
 Kapitel I: Ausgezeichnete Punkte	
§ 1 Zweistellige und dreistellige Relationen	5
§ 2 Attraktive und repulsive Mengen und Punkte	12
§ 3 Beispiele attraktiver und repulsiver Mengen	15
§ 4 Attraktive und repulsive Mengen in topologischen Räumen	21
§ 5 Existenz ausgezeichneter Punkte	25
§ 6 Brave Abbildungen	33
§ 7 Beispiele treuer und zulässiger Abbildungen	37
 Kapitel II: Hüllen ausgezeichneter Punkte	
§ 8 Hüllen und Ränder	42
§ 9 Der Satz von Minkowski und zwei Varianten	49
§ 10 Attraktive Hülle und damit verwandte Hüllenbegriffe	53
§ 11 Durch Abbildungen erzeugte Hüllen und Ränder	60
§ 12 Beispiele zu § 11	66
 Bezeichnungen	78
Stichwortregister	79
Literatur	81

Vorwort

Die minimalen und die maximalen Punkte einer geordneten Menge, die Extrempunkte einer Teilmenge eines Vektorraums, die Fixpunkte einer Abbildung, die Primelemente in einer algebraischen Struktur, der Choquet-Rand eines kompakten Raumes, die periodischen Punkte einer Strömung, die γ -extremalen Punkte nach H.Bauer [3, S.201], die Fluchtpunkte eines metrischen Raumes nach K.Menger [25, S.102] und die Φ -extremalen Punkte nach K.Fan [15, S.216]: all das sind - in recht verschiedenen mathematischen Strukturen - ausgezeichnete Punktmen-gen. Die vorliegende Arbeit zeigt, daß sie sich alle durch wenige allgemeine Begriffe simultan beschreiben lassen. Aus den Sätzen über diese Begriffe werden dann in den Spezialfällen wieder bekannte und viele interessante neue Ergebnisse über die oben aufgeführten Punkt-mengen. Das erste Kapitel ist dabei der Existenz, das zweite der Lage dieser ausgezeichneten Punkte gewidmet.

Wir beginnen damit, in § 1 zwei- und dreistellige Relationen zu betrachten und Teilmengen und Punkte durch sie zu charakterisieren (das sind z.B. minimale und maximale Punkte, invariante Mengen bei Strömungen, Extrempunkte, konvexe Mengen und Primelemente). Ein wesentlich allgemeinerer Relationsbegriff wird dann in § 2 eingeführt. "Attraktive" und "repulsive" Teilmengen und Punkte werden durch eine solche Relation definiert. Was diese beiden Prädikate in den Beispielen des § 1 und in weiteren Beispielen bedeuten, wird in § 3 gezeigt. Aus den allgemeinen, in § 2 bewiesenen Eigenschaften attraktiver und repulsiver Mengen und Punkte werden dann Aussagen über minimale und maximale Punkte, über invariante Mengen, über konvexe Mengen und Extrempunkte, über Choquet-Ränder, über offene und abgeschlossene Mengen usw.. § 4 beschäftigt sich mit der Situation, daß auf der Menge außer einer Relation noch eine Topologie gegeben ist. § 5 verwendet nun die Sätze des § 4, um erste Aussagen über die Existenz ausgezeichneter Punkte zu machen: die Existenz von minimalen Punkten

einer geordneten Menge, von Fixpunkten von Abbildungen, von periodischen Punkten von Strömungen und von Extrempunkten einer Teilmenge eines Vektorraums; insbesondere wird hier eine teilweise Antwort auf den ersten Teil der von R. Phelps in [29, S.124] gestellten Frage gegeben, in welchen hausdorffschen topologischen $\mathbb{R}$ -Vektorräumen außer den lokal-konvexen jede nicht leere, kompakte, konvexe Teilmenge einen Extrempunkt besitzt. In § 6 wird dann eine Klasse von Abbildungen untersucht, die einen mit einer Relation versehenen Raum in einen anderen solchen abbilden: die "braven" Abbildungen. Zu ihnen gehören, wie § 7 zeigt, z.B. isotone, affine, konkave, stetige Funktionen, Halbgruppenhomomorphismen sowie γ -konkave Funktionen im Sinne von H.Bauer [1, S.14]. Die Aussagen aus § 5 über die Existenz minimaler, bzw. extremer Punkte werden hier durch weitere ergänzt; außerdem wird gezeigt, wann der Choquet-Rand nicht leer ist und wann es γ -extremale und Φ -extremale Punkte gibt.

Das zweite Kapitel beginnt in § 8 mit der Definition von "Hülle", die so allgemein ist, daß etwa abgeschlossene Hülle, konvexe Hülle und holomorph-konvexe Hülle Spezialfälle sind. Ein $B \subset A$ wird dann "Rand" von A genannt, wenn es dieselbe Hülle wie A selbst hat. Interessante Anwendungen liefert schon § 9 mit dem klassischen Satz von Minkowski und entsprechenden Ergebnissen in sphärischen und hyperbolischen Räumen. § 10 behandelt dann die Frage, in welcher Weise minimale und maximale Punkte einer geordneten Menge diese aufspannen, eine Anwendung auf Strömungen wird gegeben und eine weitgehende Verallgemeinerung des Satzes von Krein-Milman; dabei wird insbesondere der zweite Teil der oben erwähnten Frage von R.Phelps teilweise beantwortet, in welchen hausdorffschen topologischen $\mathbb{R}$ -Vektorräumen außer den lokal-konvexen jede kompakte, konvexe Teilmenge abgeschlossen-konvexe Hülle ihrer Extrempunkte ist. In § 11 wird die Situation untersucht, daß Hüllen und Ränder durch gewisse Funktionenmengen erklärt werden. Wegen der Allgemeinheit der Definition des Randes in § 8 gilt dann z.B.: Ist eine Menge F reellwertiger, auf einer Menge A erklärter Funktionen gegeben, so ist $B \subset A$ ein Rand von A, wenn jedes $f \in F$ sein

Infimum in A schon in B annimmt. § 12 bringt wieder Anwendungen, insbesondere Sätze darüber, wann ausgezeichnete Bildpunkte einer Menge unter einer Abbildung Bilder von ausgezeichneten Punkten des Urbildes sind. Schließlich werden noch in normierten Räumen zwei Verallgemeinerungen des Satzes von Krein-Milman behandelt, bei denen man nicht mehr die abgeschlossen-konvexe Hülle aller Extrempunkte bildet, sondern nur noch die von leicht charakterisierbaren Teilmengen.

An dieser Stelle möchte ich meinen herzlichen Dank für viele Anregungen und Bemerkungen aussprechen: in erster Linie meinem Doktorvater und verehrten Lehrer, Herrn Professor H. Bauer, des weiteren den Herren Dr. J. Köhn und J. Bliedner.

Kapitel I: Ausgezeichnete Punkte

§ 1 Zweistellige und dreistellige Relationen

1.1 Zweistellige Relationen

Ist X eine Menge, so heißt $\subset$ eine zweistellige Relation in X , wenn für je zwei $a, b \in X$ erklärt ist, ob $a \subset b$ gilt oder nicht. Dieses $\subset$ heißt transitiv, bzw. reflexiv, bzw. antisymmetrisch, bzw. dezisiv, wenn $a, b, c \in X$, $a \subset b$, $b \subset c \Rightarrow a \subset c$, bzw. $a \in X \Rightarrow a \subset a$, bzw. $a, b \in X$, $a \subset b$, $b \subset a \Rightarrow a = b$, bzw. $a, b \in X \Rightarrow a \subset b$ oder $b \subset a$ gilt. $(X, \subset)$ heißt eine prägeordnete Menge, wenn $\subset$ transitiv und reflexiv ist. $(X, \subset)$ heißt eine geordnete Menge, wenn $\subset$ transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist. $(X, \subset)$ heißt eine totalgeordnete Menge, wenn $\subset$ dezisiv und $(X, \subset)$ eine geordnete Menge ist.

Wie es üblicherweise in prägeordneten Mengen geschieht (siehe z.B. A.Wallace [34, S.415]), definieren wir für beliebige zweistellige Relationen: Ist $A \subset X$, so heißt $a \in A$ minimal, bzw. maximal in A , wenn $b \in A$, $b \subset a \Rightarrow a \subset b$, bzw. $b \in A$, $a \subset b \Rightarrow b \subset a$ gilt; die Menge der in A minimalen, bzw. maximalen Punkte wird mit $\min(A)$, bzw. $\max(A)$ bezeichnet.

Auch zwei andere in prägeordneten Mengen übliche Begriffe (siehe z.B. L.Nachbin [27, S.20]) sollen nun für beliebige zweistellige Relationen verallgemeinert werden: Ist $B \subset A \subset X$, so heißt B fallend, bzw. wachsend in A , wenn $x_2 \in A$, $x_1 \in B$, $x_2 \subset x_1 \Rightarrow x_2 \in B$, bzw. $x_1 \in A$, $x_2 \in B$, $x_2 \subset x_1 \Rightarrow x_1 \in B$ gilt; das System der in A fallenden, bzw. wachsenden Mengen wird mit $\text{Fal}(A)$, bzw. $\text{Wac}(A)$ bezeichnet. Ein Punkt $a \in A \subset X$ heißt fallend, bzw. wachsend in A , wenn $\{a\}$ fallend, bzw. wachsend in A ist; die Menge der in A fallenden, bzw. wachsenden Punkte wird mit $\text{fal}(A)$, bzw. $\text{wac}(A)$ bezeichnet. Ein Punkt $a \in A \subset X$

ist also genau dann fallend, bzw. wachsend in A , wenn $b \in A, b \sqsubseteq a \implies a = b$, bzw. $b \in A, a \sqsubseteq b \implies a = b$ gilt. Vergleicht man dies mit der Definition minimaler und maximaler Punkte, so erhält man unmittelbar:

1.1.1 Lemma: Für jedes $A \subset X$ gilt $\text{fal}(A) \subset \min(A)$ und $\text{wac}(A) \subset \max(A)$.

Im allgemeinen gilt hier keine Gleichheit; dies läßt sich schon in prägeordneten Mengen durch einfache Beispiele belegen. Jedoch gilt Gleichheit in geordneten, und daher erst recht in totalgeordneten Mengen. Man zeigt nämlich leicht:

1.1.2 Lemma: Ist $\sqsubseteq$ antisymmetrisch, so gilt $\text{fal}(A) = \min(A)$ und $\text{wac}(A) = \max(A)$ für jedes $A \subset X$.

Zum Abschluß dieses Abschnittes noch einige Bezeichnungen. Ist $A \subset X$, so setzen wir für beliebige $a, b \in A$: $]a, b[_A := \{c \in A : a \sqsubseteq c \sqsubseteq b\}$, $[a, b[_A :=]a, b[_A \cup \{a\}$, $]a, b]_A :=]a, b[_A \cup \{b\}$, $[a, b]_A :=]a, b[_A \cup \{a, b\}$, $]a, \rightarrow[_A := \{c \in A : a \sqsubseteq c\}$, $[a, \rightarrow[_A :=]a, \rightarrow[_A \cup \{a\}$, $]\leftarrow, b[_A := \{c \in A : c \sqsubseteq b\}$ und $]\leftarrow, b]_A :=]\leftarrow, b[_A \cup \{b\}$.

Um im Folgenden redundante Definitionen zu vermeiden, legen wir den eben in 1.1 aufgetretenen Zusammenhang zwischen den Bezeichnungen gewisser Teilmengen und gewisser Punkte definitorisch fest:

1.2 Vereinbarung: Werden gewisse Teilmengen einer Menge mit einem bestimmten Prädikat (in 1.1 z.B.: fallend in A) versehen, dann wird ein Punkt a ebenfalls mit diesem Prädikat bezeichnet (hier: a heißt fallender Punkt in A), wenn das Prädikat der Menge $\{a\}$ zukommt. Wird das System aller mit dem Prädikat versehenen Teilmengen mit einer Buchstabenkombination bezeichnet, die mit einem Großbuchstaben beginnt (hier: $\text{Fal}(A)$), so wird die Menge der Punkte, denen das Prädikat zukommt, mit derselben Buchstabenkombination, aber mit einem Kleinbuchstaben beginnend bezeichnet (hier: $\text{fal}(A)$).

Als sehr nützlich erweist sich der Begriff der zweistelligen Relation im folgenden Beispiel:

1.3 Strömungen

Ist X eine Menge und T eine Menge von Abbildungen von X in sich, so heißt (X, T) eine Strömung in X mit der Transformationsmenge T . $A \subset X$ heißt eine invariante Menge, wenn $t(A) \subset A$ für jedes $t \in T$ gilt. Daß ein Punkt $x \in X$ invariant ist, besagt also nach 1.2, daß $t(x) = x$ für jedes $t \in T$ gilt. Im Gegensatz hierzu heißt $x \in X$ ein periodischer Punkt, wenn es ein $t \in T$ mit $t(x) = x$ gibt. In X wird eine zweistellige Relation $\sqsubset$ dadurch definiert, daß man für alle $x, y \in X$ erklärt:

1.3.1 Definition: $x \sqsubset y \iff$ Es gibt ein $t \in T$ mit $x = t(y)$.

Unmittelbar aus den Definitionen folgt, daß bezüglich $\sqsubset$ gilt:

1.3.2 Lemma: Invariant = fallend in X .

Als Bahn eines Punktes $x \in X$ wird die Menge $\{x\} \cup \{t(x) : t \in T\} =]\leftarrow, x]_X$ bezeichnet. Nun soll noch ein Zusammenhang zwischen den periodischen und den in X bezüglich $\sqsubset$ minimalen Punkten bewiesen werden:

1.3.3 Lemma: Ist T eine nicht leere Halbgruppe (man nennt sie Transformationshalbgruppe), so ist jeder in X minimale Punkt x periodisch.

Beweis: Da $T \neq \emptyset$ ist, gibt es ein $t \in T$ und für dieses gelte $y := t(x)$; es ist also $y \sqsubset x$, woraus $x \sqsubset y$, also $x = s(y)$ für ein $s \in T$ folgt. Für $r = s \circ t \in T$ gilt dann $r(x) = x$, womit die Behauptung gezeigt ist. (Umgekehrt ist jeder periodische Punkt in X minimal, wenn die Transformationsmenge die Eigenschaft hat, daß es zu je zwei $s, t \in T$ ein $n \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ und ein $r \in T$ mit $rot = s^n$ gibt - bei den gleich zu definierenden diskreten und kontinuierlichen Strömungen ist diese Bedingung stets erfüllt.)

Von besonderem Interesse sind zwei Spezialfälle, die, anschaulich gesprochen, gerade solche stationäre Bewegungen von Teilchen beschreiben, die von einem diskreten, bzw. kontinuierlichen Zeitparameter k abhängen. (X, T) sei wieder eine Strömung. Ist $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und T speziell $= \{t^k : k \in \mathbb{N}^*\}$ mit festem $t : X \rightarrow X$, so heißt (X, T) eine diskrete Strömung. Ist $\mathbb{R}_+^*$ die Menge der von Null verschiedenen, positiven reellen Zahlen und $T = \{t_k : k \in \mathbb{R}_+^*\}$ mit $t_k \circ t_1 =$

t_{k+1} für alle $k, l \in \mathbb{R}_+^*$, dann heißt (X, T) eine kontinuierliche Strömung. In jedem dieser beiden Fälle ist T eine nicht leere Halbgruppe. Daß eine Menge $A \subset X$ invariant ist, bedeutet, daß ein Teilchen, sobald es einmal in A liegt, diese Menge nicht mehr verläßt. Daß x ein invarianter Punkt ist, bedeutet daher insbesondere, daß ein Teilchen, das einmal nach x kommt, dann dort bleibt. Periodisch schließlich ist ein Punkt $x \in X$ dann, wenn es eine Zeitspanne k gibt, so daß ein Teilchen, das zu irgendeinem Zeitpunkt l in x ist, auch zum Zeitpunkt $l+k$ wieder in x ist.

Nach den zweistelligen Relationen betrachten wir nun

1.4 Dreistellige Relationen

Ist X eine Menge, so heißt R eine dreistellige Relation in X , wenn für jedes $x = (x_1, x_2, x_3)$ mit $x_1, x_2, x_3 \in X$ erklärt ist, ob $R(x)$ gilt oder nicht; wenn $R(x)$ gilt, so sagen wir auch, x_2 liege R-zwischen x_1 und x_3 . Ist $B \subset A \subset X$, so heißt B R-konvex in A, wenn für je zwei Punkte x_1 und x_3 aus B auch jedes $x_2 \in A$, das R-zwischen x_1 und x_3 liegt, in B ist. Ist $B \subset A \subset X$, so heißt B R-extremal in A, wenn zwei Punkte x_1 und x_3 aus A , für die ein Punkt x_2 aus B R-zwischen x_1 und x_3 liegt, notwendigerweise selbst schon in B sind. Was unter R-extremalen Punkten zu verstehen ist, geht aus 1.2 hervor.

Nun zu einigen Beispielen für dreistellige Relationen:

1.5 Konvexe und extreme Mengen

Den Anlaß zu den Bezeichnungen R-konvex und R-extremal hat folgende Situation gegeben: X sei ein Vektorraum über einem geordneten Körper K . Eine dreistellige Relation R_X^K in X wird dadurch definiert, daß man für jedes $x = (x_1, x_2, x_3)$ mit $x_1, x_2, x_3 \in X$ erklärt:

1.5.1 Definition: $R_X^K(x)$ gilt, wenn $x_2 = kx_1 + (1-k)x_3$ für ein $k \in]0, 1[$ ist.

Statt R_X^K -konvex, bzw. R_X^K -extremal sagt man hier auch einfach konvex, bzw. extremal. Die in X konvexen Mengen sind also gerade diejenigen, die üblicherwei-

se die konvexen Teilmengen des Vektorraums X genannt werden. Auch die Definition von extremal stimmt mit dem Gewohnten überein (siehe z.B. K.Yosida [35, S.362]). Ist $A \subset X$, so wird das System der in A konvexen, bzw. extremalen Mengen mit $\text{Kon}(A)$, bzw. $\text{Ext}(A)$ bezeichnet und die Menge der extremalen Punkte in A nach 1.2 mit $\text{ext}(A)$.

1.6 Bemerkung: Ebenso wie "konvex" lassen sich auch die Begriffe "p-konvex", "absolutkonvex" und "absolut p-konvex" (siehe z.B. G.Köthe [24, S.163 und 164]) nach Definition geeigneter dreistelliger Relationen R auf "R-konvex" zurückführen.

1.7 Metrisch-konvexe und metrisch-extremale Mengen

(X, m) sei ein metrischer Raum. Die Dreiecksungleichung besagt dann, daß für je drei Punkte $x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt: $m(x_1, x_3) \leq m(x_1, x_2) + m(x_2, x_3)$. Das Bestehen der Gleichheit in dieser Ungleichung charakterisiert eine dreistellige Relation R_X^m in X . Für jedes $x = (x_1, x_2, x_3)$ mit $x_1, x_2, x_3 \in X$ erklären wir:

1.7.1 Definition: $R_X^m(x)$ gilt, wenn $x_1 = x_2 = x_3$ ist oder $x_1 \neq x_2 \neq x_3$ und $m(x_1, x_3) = m(x_1, x_2) + m(x_2, x_3)$.

Statt R_X^m -konvex, bzw. R_X^m -extremal sagt man hier auch metrisch-konvex, bzw. metrisch-extremal. Ist $A \subset X$, so bezeichnen wir das System der in A metrisch-konvexen, bzw. metrisch-extremalen Mengen mit $\text{Mko}(A)$, bzw. $\text{Mex}(A)$. Statt "metrisch-konvex in X " tritt in der Literatur (siehe z.B. W.Rinow [30, S.148]) häufig die Bezeichnung "metrisch vollkonvex" auf. Metrisch-extremale Punkte werden von K.Menger [25, S.102] als "Fluchtpunkte" eingeführt und untersucht.

1.8 Bemerkung: Wenn (X, n) ein normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist und m die von der Norm n erzeugte Metrik, dann ist in X außer der dreistelligen Relation $R_X^{\mathbb{R}}$ aus 1.5 auch die dreistellige Relation R_X^m aus 1.7 erklärt. Man verifiziert sofort:

1.8.1 Lemma: Wenn $R_X^{\mathbb{R}}(x)$ für ein $x = (x_1, x_2, x_3)$ mit $x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt, so gilt auch $R_X^m(x)$.

Im allgemeinen darf man jedoch nicht erwarten, daß die Begriffe konvex und metrisch-konvex, bzw. extremal und metrisch-extremal zusammenfallen. Das ist aber der Fall, wenn (X, n) strikt-konvex ist (nach G.Köthe [24, S.346, (1)]) kann das dadurch definiert werden, daß aus $n(a+b) = n(a)+n(b)$ und $b \neq 0$ stets $a = kb$ für ein $k \in \mathbb{R}_+^* := \mathbb{R}_+^* \cup \{0\}$ folgt. Man zeigt nämlich leicht:

1.8.2 Lemma: Für jeden strikt-konvexen normierten $\mathbb{R}$ -Vektorraum (X, n) stimmen die beiden dreistelligen Relationen $R_X^{\mathbb{R}}$ und R_X^m überein.

Diese Voraussetzung ist insbesondere bei den mit der euklidischen Norm versehenen Räumen $\mathbb{R}^n$ erfüllt.

1.9 Intervallartige Mengen

Sei X eine mit einer zweistelligen Relation $\subseteq$ versehene Menge. Eine dreistellige Relation $R_{\subseteq}^X$ in X definieren wir dadurch, daß wir für jedes $x = (x_1, x_2, x_3)$ mit $x_1, x_2, x_3 \in X$ erklären:

1.9.1 Definition: $R_{\subseteq}^X(x)$ gilt, wenn $x_1 \neq x_2 \neq x_3$ und $x_1 \subseteq x_2 \subseteq x_3$ ist.

Wie es üblicherweise für spezielle zweistellige Relationen geschieht (siehe z. B. E.Čech [9, S.164]) definieren wir nun allgemein: Ist $B \subset A \subset X$, so heißt B intervallartig in A , wenn $a, c \in B, b \in A, a \subseteq b \subseteq c \implies b \in B$ gilt. Das System der in $A \subset X$ intervallartigen Mengen wird mit $\text{Int}(A)$ bezeichnet. Unmittelbar verifiziert man:

1.9.2 Lemma: Intervallartig = $R_{\subseteq}^X$ -konvex.

1.9.3 Lemma: Für jedes $A \subset X$ ist $\text{fal}(A) \subset \text{Int}(A)$ und $\text{wac}(A) \subset \text{Int}(A)$.

Außerdem gilt noch:

1.9.4 Lemma: Ist $A \subset X$, so ist $a \in A$ genau dann $R_{\subseteq}^X$ -extremal in A , wenn es fallend oder wachsend in A ist.

Beweis: Ist $a \in \text{fal}(A) \cup \text{wac}(A)$, so ist $b \neq a \neq c$ und $b \subseteq a \subseteq c$, also $R_{\subseteq}^X((b, a, c))$ für keine $b, c \in A$ möglich; daher ist a $R_{\subseteq}^X$ -extremal in A . Ist aber $a \notin \text{fal}(A) \cup \text{wac}(A)$, so bedeutet das gerade, daß es $b, c \in A$ mit $b \neq a \neq c$ und $b \subseteq a \subseteq c$, also $R_{\subseteq}^X((b, a, c))$ und $b \neq a \neq c$ gibt; dann ist aber a nicht $R_{\subseteq}^X$ -extremal in A .

Nun eine dreistellige Relation, die K.Fan in [15, S.216] eingeführt hat:

1.10 Fansche Mengen

X sei eine Menge und F eine Menge von Abbildungen, so daß jedes $f \in F$ die Menge X in eine totalgeordnete Menge $(Y_f, \leq)$ abbildet. Eine dreistellige Relation R_F in X definieren wir, indem wir für jedes $x = (x_1, x_2, x_3)$ mit $x_1, x_2, x_3 \in X$ erklären:

1.10.1 Definition: $R_F(x)$ gilt, wenn für jedes $f \in F$ aus $f(x_2) \leq f(x_1), f(x_3)$ schon $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ folgt.

Statt R_F -extremal sagen wir hier auch F-fansch und bezeichnen das System der in $A \subset X$ F-fanschen Mengen mit $\text{Fan}_F(A)$.

Der Begriff fansch ist in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung von "extremal" aus 1.5. Ist nämlich X ein lokal-konvexer, hausdorffscher topologischer $\mathbb{R}$ -Vektorraum und F sein topologischer Dualraum X' , so stimmt für jedes $A \subset X$ die Menge $\text{fan}_F(A)$ der in A F-fanschen Punkte mit der Menge $\text{ext}(A)$ der Extrempunkte von A überein (siehe z.B. B.Khanh [21, S.190, prop.2]).

Als letztes nun noch ein Beispiel aus der Algebra:

1.11 Multiplikationsstabile Mengen und Primelemente

Sei $(X, \cdot)$ eine multiplikative Halbgruppe. Eine dreistellige Relation R_X^* in X definieren wir, indem wir für jedes $x = (x_1, x_2, x_3)$ mit $x_1, x_2, x_3 \in X$ erklären:

1.11.1 Definition: $R_X^*(x)$ gilt, wenn $x_1 \neq x_2 \neq x_3$ und $x_2 = x_1 \cdot x_3$ ist.

Die in X R_X^* -konvexen Mengen nennen wir auch multiplikationsstabil, denn das sind ja gerade die Mengen in X , die mit je zwei Elementen aus X auch deren Produkt enthalten. Ein $x_2 \in X$ heißt Primelement, wenn $x_1 \neq x_2 \neq x_3$ und $x_1 \cdot x_3 = x_2$ für keine $x_1, x_3 \in X$ möglich ist. Damit gleichbedeutend ist: $x_1, x_3 \in X$, $R_X^*((x_1, x_2, x_3)) \implies x_1 = x_2 = x_3$. Also gilt:

1.11.2 Lemma: $x_2 \in X$ ist genau dann ein Primelement, wenn es R_X^* -extremal in X ist.

Im Falle der multiplikativen Halbgruppe $\mathbb{N}^*$ prüft man sofort nach, daß die oben definierten Primelemente tatsächlich die Primzahlen samt 1 sind.

§ 2 Attraktive und repulsive Mengen und Punkte

Nun werden wir einen allgemeinen Relationsbegriff einführen und dann Teilmengen und Punkte untersuchen, die sich durch eine solche Relation charakterisieren lassen. Den engen Zusammenhang zwischen diesem und dem ersten Paragraphen werden wir dann in § 3 zeigen. Beginnen wir mit einigen im folgenden wichtigen

2.1 Bezeichnungen

2.1.1: Sind X und L zwei Mengen, so heißt jedes $x = (x_l)_{l \in L} \in X^L$ ein L -Tupel aus X und für jedes $l \in L$ heißt x_l die l -Komponente von x . Wenn $M \subset L$ ist, so setzt man $x_M := (x_l)_{l \in M}$ und die x_l mit $l \in M$ heißen die M -Komponenten von x . Die L -Komponenten von x insbesondere nennt man auch die Komponenten von x .

2.1.2: Sind X und L zwei Mengen, so heißt R eine L -Relation in X , wenn für jedes L -Tupel x aus X erklärt ist, ob $R(x)$ gilt oder nicht.

2.1.3: Sind L , M und N drei Mengen mit $M \neq \emptyset \neq N$, $M \cap N = \emptyset$ und $M \cup N = L$, so heißt (L, M, N) ein Zerlegungstriplet.

2.1.4: Ist $\aleph$ eine Kardinalzahl und $\mathcal{A}$ ein Teilsystem der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X , so heißt $\mathcal{A}$ $\aleph$ -wachsend-filtrierend, wenn es zu jedem $B \subset A$ mit $0 < \text{card}(B) \leq \aleph$ ein $A \in \mathcal{A}$ gibt, so daß $B \subset A$ für jedes $B \in \mathcal{B}$ gilt.

2.1.5: Ist $\square$ eine Verknüpfung in $\mathcal{P}(X)$ für eine Menge X (d.h. für je zwei $A, B \in \mathcal{P}(X)$ ist ein $A \square B \in \mathcal{P}(X)$ definiert), so versteht man für jedes $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und jedes $B \in \mathcal{P}(X)$ unter $B \square \mathcal{A}$ das System $\{B \square A : A \in \mathcal{A}\}$. (Für $\square$ können hier also $\cap$ oder $\cup$ oder $\setminus$ stehen.)

Nun können wir die beiden für alles Folgende zentralen Begriffe einführen:

2.2 Definition: X , A und B seien drei Mengen mit $B \subset A \subset X$ und L und M zwei Mengen mit $M \subset L$. R sei eine L -Relation in X . B heißt dann M -attraktiv in A (bezüglich R), wenn für jedes L -Tupel x aus A mit $R(x)$, dessen

M-Komponenten in B liegen, alle Komponenten in B liegen (also: $x \in A^L$, $R(x)$, $x_M \in B^M \implies x \in B^L$). Dagegen heißt B M-repulsiv in A (bezüglich R), wenn für jedes L-Tupel x aus A mit $R(x)$, von dessen M-Komponenten keine in B liegt, überhaupt keine Komponente in B liegt.

Anschaulich gesprochen zieht also eine attraktive Menge die Komponenten gewisser L-Tupel an und eine repulsive Menge stößt die Komponenten gewisser L-Tupel ab. Das System der in $A \subset X$ M-attraktiven, bzw. M-repulsiven Mengen wird mit $\text{Att}(R, M, A) = \text{Att}(M, A)$, bzw. $\text{Rep}(R, M, A) = \text{Rep}(M, A)$ bezeichnet. Nach 1.2 heißt ein Punkt $a \in A$ genau dann M-attraktiv, bzw. M-repulsiv in A, wenn $\{a\}$ diese Eigenschaft hat, und $\text{att}(R, M, A)$, bzw. $\text{rep}(R, M, A)$ bezeichnet die Menge der in A M-attraktiven, bzw. M-repulsiven Punkte. Aus 2.2 sieht man unmittelbar, daß unter den dortigen Voraussetzungen gilt:

2.3 Lemma: B ist genau dann M-attraktiv in A, wenn für jedes $x \in X^L$ gilt:

$$x_{L \setminus M} \in A^{L \setminus M}, x_M \in B^M, R(x) \implies x_{L \setminus M} \in B^{L \setminus M}.$$

Es läßt sich nun eine ganze Reihe einfacher Eigenschaften der attraktiven und repulsiven Mengen angeben:

2.4 Satz: X und A seien zwei Mengen mit $A \subset X$, (L, M, N) sei ein Zerlegungstriple und R eine L-Relation in X. Es gelten dann:

- (1) $B \subset A \implies B \cap \text{Att}(M, A) \subset \text{Att}(M, B)$.
- (2) $B \in \text{Att}(M, A)$, $C \in \text{Att}(M, B) \implies C \in \text{Att}(M, A)$.
- (3) $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \text{Att}(M, A) \implies \bigcap \mathcal{A} \in \text{Att}(M, A)$.
- (4) $\mathcal{A}$ card(M)-wachsend-filtrierend und $\mathcal{A} \subset \text{Att}(M, A) \implies \bigcup \mathcal{A} \in \text{Att}(M, A)$.
- (5) $\emptyset \in \text{Att}(M, A)$.
- (6) $A \in \text{Att}(M, A)$.
- (7) $\text{Att}(M, A) = A \setminus \text{Rep}(M, A)$.

Ist M endlich, so gilt außerdem:

- (8) $\mathcal{A}$ wachsend-filtrierend und $\mathcal{A} \subset \text{Att}(M, A) \implies \bigcup \mathcal{A} \in \text{Att}(M, A)$.

Ist M sogar einpunktig, so gelten schließlich noch:

- (9) $\mathcal{A} \subset \text{Att}(M, A) \implies \bigcup \mathcal{A} \in \text{Att}(M, A)$.

$$(10) \text{ Att}(M, A) \subset \text{Rep}(N, A).$$

$$(11) \text{ Rep}(M, A) \subset \text{Att}(N, A).$$

Beweis:
.....

(1) Sei $C \in \text{Att}(M, A)$. Aus $x \in B^L \subset A^L$, $R(x)$ und $x_M \in (B \cap C)^M \subset C^M$ folgt dann $x \in C^L \cap B^L = (B \cap C)^L$. Es gilt also $B \cap C \in \text{Att}(M, B)$.

(2) $x \in A^L$, $R(x)$, $x_M \in C^M \subset B^M \implies x \in B^L$, $R(x)$, $x_M \in C^M \implies x \in C^L$.

(3) $x \in A^L$, $R(x)$, $x_M \in (\bigcap \mathcal{A})^M = \bigcap_{B \in \mathcal{A}} B^M \implies x \in A^L$, $R(x)$ und $x_M \in B^M$ für alle $B \in \mathcal{A} \implies x \in B^L$ für alle $B \in \mathcal{A} \implies x \in (\bigcap \mathcal{A})^L$. Wegen $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ist $\bigcap \mathcal{A} \subset A$, also M -attraktiv in A .

(4) $x \in A^L$, $R(x)$, $x_M \in (\bigcup \mathcal{A})^M$. Für jedes $l \in M$ gibt es ein $B_l \in \mathcal{A}$ mit $x_l \in B_l$. Da $\mathcal{A}$ card(M)-wachsend-filtrierend ist, gibt es also ein $B \in \mathcal{A}$, so daß $B_l \subset B$ für jedes $l \in M$ gilt. Dann ist aber $x \in A^L$, $R(x)$ und $x_M \in B^M$. Da B M -attraktiv in A ist, folgt also $x \in B^L \subset (\bigcup \mathcal{A})^L$.

(5) folgt aus (4) oder auch unmittelbar aus der Definition 2.2.

(6) und (7) folgen unmittelbar aus der Definition 2.2.

(8) folgt aus (4), da aus wachsend-filtrierend n -wachsend-filtrierend für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ folgt.

(9) folgt aus (4), da jedes $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ 1-wachsend-filtrierend ist.

(10) Sei $M = \{m\}$ und $B \in \text{Att}(M, A)$. Für jedes $x \in A^L$ mit $R(x)$ und $x_N \in (A \setminus B)^N$ ist dann $x \in (A \setminus B)^L$ zu zeigen. Nehmen wir das Gegenteil an. Wegen $x_N \in (A \setminus B)^N$ müßte dann $x_m \notin A \setminus B$, also $x_m \in B$ und daher $x_M \in B^M$ gelten. Da B M -attraktiv in A ist, folgte hieraus $x \in B^L$, was wegen $N \neq \emptyset$ ein Widerspruch zu $x_N \in (A \setminus B)^N$ wäre.

(11) ergibt sich aus (10) und (7).

§ 3 Beispiele attraktiver und repulsiver Mengen

Zuerst eine für diesen und alle folgenden Paragraphen wichtige topologische

3.1 Vorbemerkung: Wenn eine Teilmenge A einer Menge X mit einer Topologie versehen ist, dann wird jede Teilmenge B von A (soweit nichts anderes vereinbart wird) mit der Relativtopologie versehen; ist B dann ein T_0 -, bzw. T_1 -, bzw. T_2 -Raum, so heißt es eine T_0 -Menge, bzw. T_1 -Menge, bzw. T_2 -Menge. Ein topologischer Raum heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung des Raumes eine endliche Teilüberdeckung besitzt (von den Trennungsaxiomen wird keines vorausgesetzt).

Nun zu den Beispielen zu § 2:

3.2 Fallende und wachsende Mengen

X sei eine Menge und $\sqsubseteq$ eine zweistellige Relation in X . Wir definieren ein Zerlegungstriple durch $(L, M, N) := (\{1, 2\}, \{1\}, \{2\})$ und eine L -Relation $R_X^{\sqsubseteq}$ in X (nicht mit R_X^X aus 1.9 zu verwechseln) dadurch, daß wir für jedes $x = (x_1, x_2) \in X^L$ erklären:

3.2.1 Definition: $R_X^{\sqsubseteq}(x) \iff x_2 \sqsubseteq x_1$.

Der Vergleich von 2.3 mit der Definition von "fallend" zeigt, daß $\text{Att}(R_X^{\sqsubseteq}, M, A) = \text{Fal}(A)$ für jedes $A \subset X$ gilt, und wegen 2.4.10 und 2.4.11 ist $\text{Att}(R_X^{\sqsubseteq}, M, A) \subset \text{Rep}(R_X^{\sqsubseteq}, N, A) \subset \text{Att}(R_X^{\sqsubseteq}, M, A)$, also $\text{Att}(R_X^{\sqsubseteq}, M, A) = \text{Rep}(R_X^{\sqsubseteq}, N, A)$. Es gilt daher:

3.2.2 Lemma: Fallend = M -attraktiv bzgl. $R_X^{\sqsubseteq}$ = N -repulsiv bzgl. $R_X^{\sqsubseteq}$.

Analog zeigt man:

3.2.3 Lemma: Wachsend = N -attraktiv bzgl. $R_X^{\sqsubseteq}$ = M -repulsiv bzgl. $R_X^{\sqsubseteq}$.

Mit diesen beiden Lemmata werden nun aus den Aussagen in 2.4 solche über fallende und wachsende Mengen. Sei $A \subset X$. Nach 2.4.7 führt Komplementbildung in A die in A fallenden Mengen in die in A wachsenden Mengen über und umgekehrt.

Nach 2.4.3 und 2.4.9 liegen Vereinigungen beliebiger und Schnitte nicht leerer

Teilsysteme von $\text{Fal}(A)$, bzw. $\text{Wac}(A)$ stets wieder in $\text{Fal}(A)$, bzw. $\text{Wac}(A)$. Aus 2.4.2 schließlich folgt, daß "fallend in" und "wachsend in" transitive zweistellige Relationen in $\mathcal{P}(X)$ sind.

Wenn (X, T) eine Strömung ist, so ist nach 1.3.2 und 3.2.2 auch "invariant" ein spezielles "attraktiv" und aus dem Obigen ergibt sich mit 2.4.6, daß beliebige Schnitte und Vereinigungen invarianter Mengen stets wieder invariant sind.

3.3 R-konvexe und R-extremale Mengen

X sei eine Menge und R eine dreistellige Relation in X . Definieren wir ein Zerlegungstriple durch $(L, M, N) := (\{1, 2, 3\}, \{2\}, \{1, 3\})$, so ist R auch eine L -Relation in X , denn es ist ja für jedes $x = (x_1, x_2, x_3) \in X^L$ erklärt, ob $R(x)$ gilt oder nicht. Aus 2.3 und den Definitionen von "R-konvex" und "R-extremal" sieht man unmittelbar:

3.3.1 Lemma: $R\text{-extremal} = M\text{-attraktiv}$ bezüglich R .

3.3.2 Lemma: $R\text{-konvex} = N\text{-attraktiv}$ bezüglich R .

Wieder werden aus 2.4 nun Eigenschaften R-konvexer und R-extremaler Mengen: Sei $A \subset X$. Schnitte nicht leerer und Vereinigungen wachsend-filtrierender Systeme in A R-konvexer Mengen sind in A R-konvex. Schnitte nicht leerer und Vereinigungen beliebiger Systeme in A R-extremaler Mengen sind R-extremal in A. Nach 2.4.11 ist das Komplement in A einer in A R-extremalen Menge stets R-konvex in A. Aus 2.4.2 schließlich folgt noch, daß "R-konvex in" und "R-extremal in" transitive zweistellige Relationen in $\mathcal{P}(X)$ sind.

Die in 1.5 bis 1.11 eingeführten Begriffe konvex (auch p-konvex, absolutkonvex und absolut p-konvex), extremal, metrisch-konvex, metrisch-extremal, intervallartig, fansch, multiplikationsstabil und Primelement sind also alle Spezialfälle von "attraktiv" und die eben aufgeführten Eigenschaften von R-konvex und R-extremal lassen sich unmittelbar in solche dieser spezielleren Begriffe umschreiben.

Nun zu einem Beispiel, wo die zugrundeliegende L-Relation eine wesentlich größere Menge L hat:

3.4 $\mathcal{V}$ -extremale Mengen

X sei eine Menge und $\mathcal{V} \subset X \times \mathcal{P}(X)$. Etwas allgemeiner als H. Bauer in [3, S. 201] erklären wir:

3.4.1 Definition: Ist $B \subset A \subset X$, so heißt B $\mathcal{V}$ -extremal in A, wenn gilt:
 $(t, T) \in \mathcal{V}$, $t \in B$ und $T \subset A \implies T \subset B$.

Das System der $\mathcal{V}$ -extremalen Mengen in $A \subset X$ wird mit $\text{Ext}_{\mathcal{V}}(A)$ bezeichnet. Nun zeigen wir, daß der Begriff " $\mathcal{V}$ -extremal" ein Spezialfall von "attraktiv" ist:

Wenn $\emptyset \neq N \subset X$ und $m \notin N$ ist, so ist $(L, M, N) := (\{m\} \cup N, \{m\}, N)$ ein Zerlegungstriplel. Eine L-Relation $R_{\mathcal{V}}$ in X definiert man dadurch, daß man für jedes L-Tupel x aus X erklärt:

3.4.2 Definition: $R_{\mathcal{V}}(x) :\iff (x_m, \bigcup_{l \in N} \{x_l\}) \in \mathcal{V}$.

Es gilt dann:

3.4.3 Lemma: $\mathcal{V}$ -extremal = M-attraktiv bezüglich $R_{\mathcal{V}}$.

Beweis:
:

1) Sei B M-attraktiv in A, $(t, T) \in \mathcal{V}$, $t \in B$ und $T \subset A$. Zu zeigen ist $T \subset B$. Für $T = \emptyset$ ist das klar, ansonsten wird durch $x_1 := \begin{cases} 1, & \text{falls } 1 \in T \\ \text{irgendein } s \in T, & \text{falls } 1 \in N \setminus T \\ t, & \text{falls } 1 = m \end{cases}$ ein $x \in A^L$ definiert. Da $R_{\mathcal{V}}(x)$ und $x_m \in B$ gilt, ist $x \in B^L$, also $T \subset B$.

2) Sei B $\mathcal{V}$ -extremal in A, $x \in A^L$, $R_{\mathcal{V}}(x)$ und $x_m \in B$. Zu zeigen ist $x \in B^L$. Für $T := \bigcup_{l \in N} \{x_l\}$ gilt $T \subset A$ und $(x_m, T) \in \mathcal{V}$. Daraus folgt $T \subset B$, also $x \in B^L$.

Nach 2.4 ist " $\mathcal{V}$ -extremal in" eine transitive zweistellige Relation in $\mathcal{P}(X)$. Ist $A \subset X$, so liegen Vereinigungen beliebiger und Schnitte nicht leerer Teilsysteme von $\text{Ext}_{\mathcal{V}}(A)$ wieder in $\text{Ext}_{\mathcal{V}}(A)$.

Enge Zusammenhänge bestehen einerseits zwischen " $\mathcal{V}$ -extremal" und "fansch" (siehe K. Fan [15, S.219]) und andererseits zwischen " $\mathcal{V}$ -extremal" und "extre-

mal" (siehe H.Bauer [1, S.16]). Diese Zusammenhänge sollen hier nicht untersucht werden. Statt dessen bringen wir ein sehr wichtiges anderes Beispiel für " $\mathcal{V}$ -extremal":

3.5 Choquetsche Mengen

X sei ein topologischer Raum und F eine Menge von Abbildungen von X in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Zu jedem $x \in X$ definieren wir eine Menge $W(x)$ von Maßen im Sinne von N.Bourbaki [8, S.47, déf.2]: w liegt in $W(x)$, wenn w ein positives Maß auf einer (von w abhängigen) kompakten T_2 -Menge $W \subset X$ ist mit $w(W) = 1$ und $\int^* f dw := \int^* g dw \leq f(x)$ für alle $f \in F$, wo g die Restriktion von f auf W bezeichnet. (Als Träger hat w eine kompakte T_2 -Menge $\text{Tr}(w) \subset W$.) Nun erklären wir:

3.5.1 Definition: Ist $B \subset A \subset X$, so heißt B F-choquetsch in A, wenn gilt:

$$b \in B, w \in W(b) \text{ und } \text{Tr}(w) \subset A \implies \text{Tr}(w) \subset B.$$

Die Gesamtheit der in $A \subset X$ F-choquetschen Mengen, bzw. Punkte wird mit $\text{cho}_F(A)$, bzw. $\text{cho}_F(A)$ bezeichnet (vgl. 1.2). Aus 3.5.1 folgt unmittelbar:

3.5.2 Lemma: x ist genau dann F-choquetscher Punkt in $A \subset X$, wenn das Dirac-Maß ε_x das einzige Maß in $W(x)$ ist, dessen Träger in A liegt.

$\text{cho}_F(A)$ ist also gerade das, was man unter etwas spezielleren Voraussetzungen als "Choquetrand von A" bezeichnet (siehe z.B. H.Bauer [4, S.95, Def.2]). Der Begriff "choquetsch" läßt sich unmittelbar auf " $\mathcal{V}$ -extremal" und damit nach 3.4.3 auch auf "attraktiv" zurückführen. Definieren wir nämlich $\mathcal{V} := \{(t, T) : t \in X \text{ und es gibt ein } w \in W(t) \text{ mit } \text{Tr}(w) = T\}$, so zeigt der Vergleich von 3.4.1 und 3.5.1:

3.5.3 Lemma: F-choquetsch = $\mathcal{V}$ -extremal.

Die in 3.4 aufgeführten Eigenschaften $\mathcal{V}$ -extremaler Mengen sind also in gleicher Weise für F-choquetsche Mengen gültig. Es sei hier noch eine weitere, z. B. von M.Grossman in [17, S.3, 2.3.b] bewiesene Eigenschaft erwähnt, die direkt aus 2.4.1 folgt: Ist $B \subset A \subset X$, so gilt $B \cap \text{cho}_F(A) \subset \text{cho}_F(B)$.

Zu den Beziehungen zwischen "choquetsch" und "extremal" siehe z.B. H.Bauer [1,

S.34, 2.5.6], zu denen zwischen "choquetsch" und "fansch" siehe z.B. B.Khanh [21, S.191, prop.4].

Nun noch ein letztes Beispiel:

3.6 Abgeschlossene und offene Mengen

X sei ein topologischer Raum. Wenn $\emptyset \neq M \subset X$ und $n \notin M$ ist, so ist $(L, M, N) := (M \cup \{n\}, M, \{n\})$ ein Zerlegungstriplet. Eine L -Relation R_X^{top} in X definiert man dadurch, daß man für jedes L -Tupel x aus X erklärt:

$$\text{3.6.1 Definition: } R_X^{\text{top}}(x) :\iff x_n \in \bigcup_{l \in M} \{x_l\}.$$

Es gilt dann:

3.6.2 Lemma: Ist $B \subset A \subset X$, so ist B genau dann abgeschlossen in A , wenn es M -attraktiv in A bezüglich R_X^{top} ist.

Beweis:
.....

1) Sei B M -attraktiv in A , $b \in \bar{B}$ und $b \in A$. Zu zeigen ist $b \in B$. Ein $x \in A^L$ wird

definiert durch: $x_l := \begin{cases} 1, & \text{falls } l \in B \\ \text{irgendein } c \in B, & \text{falls } l \in M \setminus B \\ b, & \text{falls } l = n \end{cases}$. Da $R_X^{\text{top}}(x)$ und $x_M \in$

B^M gilt, ist $b = x_n \in B$.

2) Sei B abgeschlossen in A , $x_n \in A$, $R_X^{\text{top}}(x)$ und $x_M \in B^M$. Zu zeigen ist nach 2.3, daß $x_n \in B$ ist. Für $C := \bigcup_{l \in M} \{x_l\}$ gilt nach Voraussetzung $C \subset B$ und $x_n \in \bar{C}$. Da $x_n \in A$ ist, muß dann auch x_n in $B = A \cap \bar{B} \supset A \cap \bar{C}$ liegen.

Aus 3.6.2 und 2.4.7 folgt nun:

3.6.3 Lemma: Offen = M -repulsiv bezüglich R_X^{top} .

Die Eigenschaften von "attraktiv" können nun zu solchen von "abgeschlossen" umgeschrieben werden. So besagt etwa 2.4.2 (vgl. z.B. E.Čech [9, S.280, 17 A.4.c]):

3.6.4 Lemma: "abgeschlossen in" ist eine transitive zweistellige Relation in $\mathcal{P}(X)$.

Nach 2.4.3 und 2.4.6 sind beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen stets wie-

der abgeschlossen. Entsprechendes gilt für Vereinigungen bekanntlich nicht, jedoch ergibt sich aus 2.4.4 (falls $X \neq \emptyset$ ist, setze man $M := X$) folgender bemerkenswerte

3.6.5 Satz: Ist $\mathcal{A}$ ein $\text{card}(X)$ -wachsend-filtrierendes System abgeschlossener Teilmengen von X , so ist auch $\bigcup \mathcal{A}$ abgeschlossen.

3.7 Bemerkung: Wenn X in 3.6 ein topologischer Raum ist, der dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt, so kann der ganze Abschnitt 3.6 (vom Beweis zu 3.6.2 abgesehen) wörtlich übernommen werden, wenn man nicht mehr ein M mit $\emptyset \neq M \subsetneq X$, sondern statt dessen $M := \mathbb{N}$ nimmt. Statt 3.6.5 ergibt sich in diesem Fall, daß jede $\aleph_0$ -wachsend-filtrierende Vereinigung abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist.

§ 4 Attraktive und repulsive Mengen in topologischen Räumen

Außer den Eigenschaften attraktiver und repulsiver Mengen aus § 2 lassen sich weitere herleiten, wenn die Grundmenge X , bzw. eine Teilmenge von ihr mit einer Topologie versehen ist. Zuerst allerdings noch einige

4.1 Bezeichnungen

4.1.1: Ist X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, so setzt man abkürzend $\mathcal{A}_m := \min(\mathcal{A})$ und für jedes $A \subset X$: $\mathcal{A}_A := \{B \in \mathcal{A} : A \cap B \neq \emptyset\}$. Die Mengen des Systems $\mathcal{A}_A$ heißen die $\mathcal{A}$ -Treffer von A .

4.1.2: Sind X und L zwei Mengen und ist R eine L -Relation in X , so bezeichnet $\text{Att}(M, A)_a$, bzw. $\text{Rep}(M, A)_a$ für jedes $M \subset L$ und jedes mit einer Topologie versehene $A \subset X$ das System der in A abgeschlossenen und M -attraktiven, bzw. M -repulsiven Mengen. Insbesondere bezeichnet dann $\text{att}(M, A)_a$ nach 1.2 die Menge der in A abgeschlossenen und M -attraktiven Punkte. Entsprechend bezeichnet $\text{Att}(M, A)_o$, bzw. $\text{Rep}(M, A)_o$ das System der in A offenen und M -attraktiven, bzw. M -repulsiven Mengen.

4.1.3: Wenn aufgrund von 4.1.1, 4.1.2 oder späteren Bezeichnungen mehrere untere Indizes zu schreiben sind, so kann man diese, falls keine Mißverständnisse zu befürchten sind, direkt aneinander reihen. So bedeutet beispielsweise $\text{Att}(M, A)_{aBm}$ nichts anderes als $((\text{Att}(M, A)_a)_B)_m$, also die Gesamtheit aller minimalen Mengen im System der in A abgeschlossenen und M -attraktiven Mengen, die B treffen.

Nun die für diesen Paragraphen wichtige Voraussetzung:

- (4.A) X ist eine Menge, A eine mit einer Topologie versehene Teilmenge von X ,
 (L, M, N) ein Zerlegungstriplet und R eine L -Relation in X .

Man erklärt nun:

4.2 Definition: Ist 4.A erfüllt, so nennen wir die Mengen aus $\text{Att}(M, A)_{aA}$ minimal-M-attraktiv in A; das sind also gerade die minimalen Mengen im System der nicht leeren, in A abgeschlossenen und M-attraktiven Mengen.

Als erstes Ergebnis nun:

4.3 Lemma: Ist 4.A erfüllt, so gelten:

- (1) Die in A minimal-M-attraktiven Mengen sind disjunkt.
- (2) Ist M endlich und B eine kompakte Teilmenge von A, so ist $\text{Rep}(M, A)_{aB}$ $\cap$ -induktiv, d.h. der Schnitt jeder nicht leeren Kette aus diesem Mengensystem liegt wieder in ihm.

Beweis:

.....

(1) Seien B und C zwei in A minimal-M-attraktive Mengen. Nach 2.4.3 ist $B \cap C$ M-attraktiv und abgeschlossen in A. Wegen der Minimalität von B und C muß also entweder $B \cap C = \emptyset$ oder $B = B \cap C = C$ gelten. Damit ist die Behauptung gezeigt.

(2) $\mathcal{A}$ sei eine nicht leere Kette aus $\text{Rep}(M, A)_{aB}$. Nach 2.4.7 und 2.4.8 gilt $\bigcap \mathcal{A} \in \text{Rep}(M, A)_a$. Bleibt zu zeigen, daß $\bigcap \mathcal{A}$ die Menge B trifft. $B \cap \mathcal{A}$ ist eine nicht leere Kette nicht leerer, in B abgeschlossener Mengen, aus der Kompaktheit von B folgt also $\emptyset \neq \bigcap (B \cap \mathcal{A}) = B \cap (\bigcap \mathcal{A})$.

Weiterhin gilt:

4.4 Lemma: Ist 4.A erfüllt und A kompakt, so gilt:

(1) $\text{Att}(M, A)_{aA}$ ist $\cap$ -induktiv.

(2) Zu jedem $B \in \text{Att}(M, A)_{aA}$ gibt es ein in A minimal-M-attraktives C mit $C \subset B$.

Beweis:

.....

(1) folgt aus 2.4.3 und der Kompaktheit von A.

(2) folgt mit dem Zornschen Lemma aus (1).

Als nächstes definieren wir vier Eigenschaften, in denen sowohl die Topologie als auch die attraktiven und repulsiven Mengen eine Rolle spielen:

4.5 Definition: Wenn 4.A gilt, so erklärt man:

- (1) A heißt lokal-M-attraktiv, wenn $\text{Att}(M, A)_0$ eine Basis der Topologie von A ist.
- (2) A heißt M-attraktiv-trennbar, wenn je zwei Punkte aus A, die durch eine in A offene Menge B getrennt werden (d.h. genau einer der beiden Punkte ist in B), auch durch eine Menge aus $\text{Att}(M, A)_0$ getrennt werden.
- (3) A heißt M-attraktiv-reduzierend, wenn für jede kompakte T_0 -Menge $B \subset A$ alle in B minimal-M-attraktiven Mengen einpunktig sind.
- (4) A heißt M-attraktiv-invertierend, wenn $B \cap \text{Rep}(N, A)_{aBm} \subset \text{Att}(M, B)$ für jedes $B \subset A$ gilt.

Die wichtigsten Eigenschaften dieser vier Begriffe fassen wir zusammen im folgenden

4.6 Satz: Unter der Voraussetzung 4.A gelten folgende Aussagen:

- (1) Die drei Eigenschaften lokal-M-attraktiv, M-attraktiv-trennbar und M-attraktiv-reduzierend sind nach unten erblich in $\mathcal{P}(A)$, d.h. sie übertragen sich von einem $B \subset A$ auf jedes $C \subset B$.
- (2) Ist A lokal-M-attraktiv, so ist es auch M-attraktiv-trennbar.
- (3) Ist A eine M-attraktiv-trennbare T_0 -Menge, so ist es auch bezüglich jeder feineren Topologie M-attraktiv-trennbar.
- (4) A ist genau dann M-attraktiv-reduzierend, wenn es zu jeder kompakten,

mindestens zweipunktige T_0 -Menge $B \subset A$ ein $C \in \text{Att}(M, B)_{aB}$ mit $C \not\supset B$ gibt.

(5) Ist A eine kompakte, M -attraktiv-reduzierende T_0 -Menge, dann liegt in jedem $B \in \text{Att}(M, A)_{aA}$, also insbesondere in A selbst, wenn es nicht leer ist, ein in A M -attraktiver und abgeschlossener Punkt.

(6) Ist N endlich und A N -attraktiv-trennbar und M -attraktiv-invertierend, dann ist A M -attraktiv-reduzierend.

Beweis:

.....

(1) Für lokal- M -attraktiv folgt die Behauptung aus 2.4.1 und für M -attraktiv-reduzierend ist sie trivial. Bleibt also noch " M -attraktiv-trennbar" zu behandeln: Sei $B \subset A$. Wenn $a, b \in B$ durch eine in B offene Menge getrennt werden, so auch durch eine in A offene. Daher werden a und b durch ein $C \in \text{Att}(M, A)_O$ und dann auch durch das nach 2.4.1 in $\text{Att}(M, B)_O$ gelegene $B \cap C$ getrennt.

(2) und (3) sind trivial.

(4) Ist A M -attraktiv-reduzierend, so ist die Bedingung aus (4) wegen 4.4.2 erfüllt. Sei nun also die Bedingung aus (4) erfüllt, B eine kompakte T_0 -Teilmenge von A und C eine mindestens zweipunktige Menge aus $\text{Att}(M, B)_a$. Dann gibt es ein $D \in \text{Att}(M, C)_{aC}$ mit $D \not\supset C$. Wegen 2.4.2 und 3.6.4 ist D eine nicht leere, in B abgeschlossene und M -attraktive, echte Teilmenge von C ; C ist daher nicht minimal- M -attraktiv in B . A ist also M -attraktiv-reduzierend.

(5) folgt aus 4.4.2.

(6) Sei B eine kompakte, mindestens zweipunktige T_0 -Menge in A . Dann gibt es ein $C \in \text{Att}(N, A)_{oB}$ mit $C \not\supset B$, und daher gilt $B \not\subset A \setminus C \in \text{Rep}(N, A)_{aB}$. Nach 4.3.2 und dem Zornschen Lemma gibt es ein $D \in \text{Rep}(N, A)_{aBm}$ mit $D \subset A \setminus C$. Also gilt nun $B \not\subset B \cap D \in \text{Att}(M, B)_{aB}$; nach (4) ist daher A M -attraktiv-reduzierend.

§ 5 Existenz ausgezeichnete Punkte

Die Ergebnisse des letzten Paragraphen werden es nun erlauben, über die Existenz von minimalen Punkten, Fixpunkten, periodischen Punkten und Extrempunkten Aussagen zu machen.

Die Bezeichnungsweise aus 4.1.2 wird sinngemäß auf die Spezialfälle aus § 3 übertragen, so daß Ausdrücke wie $\text{Fal}(A)_a$ oder $\text{Kon}(X)_o$ keiner weiteren Erläuterung mehr bedürfen. Dasselbe gilt für Begriffe wie "minimal-M-attraktiv" oder "lokal-N-attraktiv", aus denen in den Spezialfällen "minimal-fallend" oder "lokal-konvex" werden kann. (Dieses "lokal-konvex" war übrigens Anlaß für die Bezeichnung "lokal-N-attraktiv".)

5.1 Zweistellige Relationen

Sei X ein topologischer Raum, der mit einer zweistelligen Relation $\subseteq$ versehen ist. Im folgenden werden wir gelegentlich die Bezeichnungen aus 3.2 verwenden. X heißt fallend-abgeschlossen, bzw. wachsend-abgeschlossen, wenn für jedes $x \in X$ die Menge $]\leftarrow, x]_X$, bzw. $[x, \rightarrow[_X$ in X abgeschlossen ist. Es gilt:

5.1.1 Lemma: Ist X fallend-abgeschlossen, $\subseteq$ transitiv und $A \subset X$, dann

gilt: $\bigcup \text{Fal}(A)_{aAm} \subset \min(A)$.

Beweis: Sei $a \in B \in \text{Fal}(A)_{aAm}$ und $b \subseteq a$ für ein $b \in A$. $A \cap]\leftarrow, b]_X$ ist eine in A fallende und abgeschlossene, nicht leere Teilmenge von B , muß also, da B minimal-fallend ist, $= B$ sein; daher ist $a \subseteq b$, also $a \in \min(A)$. (Man zeigt leicht, daß sogar $\bigcup \text{Fal}(A)_{aAm} = \min(A)$ ist.)

Eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von A.Wallace [34, S.415] folgt nun aus 5.1.1 und 4.4,2:

5.1.2 Satz: Ist X kompakt, nicht leer und fallend-abgeschlossen und $\subseteq$ transitiv, dann ist $\min(X) \neq \emptyset$.

Nach 3.2.2 und 2.4.1 gilt $B \cap \text{Rep}(N, X)_{aBm} = B \cap \text{Fal}(X)_{aBm} \subset B \cap \text{Fal}(X) = B \cap$

$\text{Att}(M, X) \subset \text{Att}(M, B)$ für jedes $B \subset X$, d.h. unabhängig von der Topologie von X gilt:

5.1.3 Lemma: X ist fallend-invertierend.

Als nächstes zeigen wir:

5.1.4 Lemma: Ist X fallend-abgeschlossen und $\sqsubseteq$ transitiv und antisymmetrisch, dann ist X ein wachsend-trennbarer T_0 -Raum.

Beweis: Sind $a, b \in X$ mit $a \not\sqsubseteq b$, so gilt $a \not\sqsubseteq b$ oder $b \not\sqsubseteq a$. a und b werden also durch eine der Mengen $]\leftarrow, a]_X$ und $]\leftarrow, b]_X$ getrennt, also auch durch deren offenes, wachsende Komplement.

Hiervon gilt eine teilweise Umkehrung:

5.1.5 Lemma: Ist X ein wachsend-trennbarer T_0 -Raum, so ist $\sqsubseteq$ antisymmetrisch.

Beweis: Zwei Punkte $a, b \in X$ mit $a \sqsubseteq b$ und $b \sqsubseteq a$ können durch keine wachsende Menge getrennt werden, was für verschiedene Punkte nach Voraussetzung stets möglich ist. Daher gilt $a = b$.

Aus 4.6.6 folgt mit 5.1.3:

5.1.6 Lemma: Ist X wachsend-trennbar, so ist es fallend-reduzierend.

Aus 4.6.5 ergibt sich nun mit 5.1.6, 5.1.5 und 1.1.2:

5.1.7 Satz: Ist X ein nicht leerer, kompakter, wachsend-trennbarer T_0 -Raum, dann ist $\min(X) = \text{fal}(X) \neq \emptyset$.

5.1.4 zeigt, daß zwischen 5.1.2 und 5.1.7 enge Zusammenhänge bestehen. Jedoch kann keiner der beiden Sätze aus dem anderen hergeleitet werden; es läßt sich nämlich schon eine zweipunktige Menge X so auf zwei verschiedene Weisen mit einer Topologie und einer zweistelligen Relation versehen, daß das eine Mal die Voraussetzungen von 5.1.2 erfüllt sind und die von 5.1.7 nicht und daß das andere Mal gerade das Umgekehrte gilt.

Zur Klasse der fallend-abgeschlossenen prägeordneten Mengen gehören insbeson-

dere diejenigen, die L.Nachbin in [27, S.100] als "semiclosed" und "closed" einführt.

5.2 Strömungen

(X, T) sei eine Strömung in einem kompakten Raum X . Nach 1.3.2 sind die invarianten Mengen gerade die in X fallenden bezüglich der zweistelligen Relation $\sqsubset$ aus 1.3.1. Die Mengen des Systems $\text{Fal}(X)_{aX_m}$, also die minimalen, nicht leeren, abgeschlossenen, invarianten Mengen heißen nach 4.2 minimal-invariant. (Dies stimmt mit der üblichen Bezeichnungsweise - siehe etwa K.Jacobs [19, S.7] - überein. Übrigens war das der Anlaß zur Bezeichnung "minimal-M-attraktiv".) Aus 4.3.1 und 4.4.2 werden nun zwei einfache Sätze der topologischen Dynamik (vgl. K.Jacobs [19, S.8, prop.3 und th.1]):

5.2.1 Satz: Die minimal-invarianten Mengen sind disjunkt.

5.2.2 Satz: In jeder nicht leeren, abgeschlossenen, invarianten Menge ist eine minimal-invariante enthalten.

Jetzt ein Satz über die Existenz periodischer Punkte, der sich insbesondere bei diskreten und kontinuierlichen Strömungen anwenden läßt:

5.2.3 Satz: Ist (X, T) eine Strömung in einem nicht leeren, kompakten Raum X mit nicht leerer Transformationshalbgruppe T und hat jeder Punkt aus X eine abgeschlossene Bahn, dann gibt es mindestens einen periodischen Punkt.

Beweis: Da die Bahnen der Punkte abgeschlossen sind, ist X bezüglich $\sqsubset$ fallend-abgeschlossen und da T eine Halbgruppe ist, ist $\sqsubset$ transitiv. Nach 5.1.2 besitzt X mindestens einen minimalen Punkt und dieser ist nach 1.3.3 periodisch.

Da wir den Begriff der Strömung in 1.3 sehr weit gefaßt haben, können wir in diesem Zusammenhang jetzt noch zwei einfache Fixpunktsätze beweisen:

5.2.4 Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen: (X, m) sei ein nicht leerer, kompakter metrischer Raum und t eine kontrahierende Abbildung von X in sich, d.h. es gibt ein $k \in [0, 1[_{\mathbb{R}}$, so daß $m(t(x), t(y)) \leq k \cdot m(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt. Dann hat t einen Fixpunkt.

Beweis: Betrachten wir die Strömung $(X, \{t\})$. Nach 5.2.2 gibt es eine minimal-invariante Menge A , und da t stetig ist, ist $t(A)$ kompakt, also eine nicht leere, invariante, abgeschlossene Teilmenge von A ; es muß also $A = t(A)$ sein. Daraus folgt $d(A) = d(t(A)) \leq k \cdot d(A)$, wobei $d(A)$, bzw. $d(t(A))$ den Durchmesser von A , bzw. $t(A)$ bezeichnet. Dies ist nur bei $d(A) = 0$, also einpunktigem $A = \{a\}$ möglich; a ist ein invarianter Punkt der betrachteten Strömung, also ein Fixpunkt von t . (Vgl. z.B. G.Simmons [32, S.338, lemma])

5.2.5 Fixpunktsatz für isotone Abbildungen: $(X, \leq)$ sei ein nicht leerer, vollständig totalgeordneter Raum und t eine isotone Abbildung von X in sich. Dann hat t einen Fixpunkt.

Beweis: Wieder betrachten wir die Strömung $(X, \{t\})$ in dem bezüglich der üblichen Ordnungstopologie kompakten T_2 -Raum X (siehe z.B. E.Čech [9, S.245, 781 und 488]). Seien nun $a, b \in X$ mit $a < b$. Wenn $t(a) \leq a$ (bzw. $t(a) > a$) ist, dann folgt für $A :=]a, \rightarrow[_X$ (bzw. $A :=]\leftarrow, \inf(b, t(a))[_X$) aus $t(c) \in A$, daß $t(c) > a \geq t(a)$ (bzw. $t(c) < t(a)$), also $c > a$ (bzw. $c < a < \inf(b, t(a))$) und daher $c \in A$ ist. A ist also offen und wachsend bezüglich der zweistelligen Relation $\sqsubset$ aus 1.3.1 und trennt die Punkte a und b . Bezüglich $\sqsubset$ ist X also wachsend-trennbar und wegen 5.1.7 gibt es einen bezüglich $\sqsubset$ fallenden Punkt in X ; dieser ist nach 1.3.2 invarianter Punkt der betrachteten Strömung, also Fixpunkt von t . (Vgl. z.B. G.Birkhoff [6, S.41, ex.6])

5.3 Existenz von Extrempunkten

In diesem Abschnitt machen wir von den Bezeichnungen in 3.3 Gebrauch. Zuerst zeigen wir:

5.3.1 Lemma: Ist ein Vektorraum X über einem archimedisch geordneten Körper K mit einer translationsinvarianten Topologie versehen, so ist X extremal-invertierend.

Beweis: Wir haben $A \cap \text{Rep}(N, X)_{\text{aAm}} \subset \text{Att}(M, A) = \text{Ext}(A)$ für jedes $A \subset X$ nachzuweisen. Ist $B \in \text{Rep}(N, X)_{\text{aAm}}$, so liegt $C := X \setminus B$ in $\text{Aff}(N, X)_0 = \text{Kon}(X)_0$. Für ein $r \in]0, 1[_K$ gelte $b = ra + (1-r)c \in B$ mit $a, c \in A$. Zu zeigen ist, daß weder a noch c in C liegt:

Nehmen wir $a \in C$ an. Aus der Konvexität von C folgt dann, weil $b \notin C$ ist, erstens $c \notin C$ und, da 0 in der Menge $D := \{s \in [0, 1]_K : a + s(c-a) \in C\}$ liegt, zweitens, daß D fallend in $[0, 1]_K$ ist. $1 \notin D$. Weil K archimedisch ist, gibt es nun $k, l \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} \leq r$, $l < k$, $\frac{1}{k} \in D$ und $\frac{l+1}{k} \notin D$. $E := C + [0, 1-r-\frac{1}{k}]_K \cdot (c-a)$ ist eine offene, konvexe Obermenge von C . E ist echte Obermenge von C , weil $b = (a + \frac{1}{k}(c-a)) + (1-r-\frac{1}{k})(c-a)$ in E aber nicht in C liegt. Schließlich liegt der Punkt c nicht in E , denn sonst gäbe es ein $d \in C$ und ein $s \in [0, 1-r-\frac{1}{k}]_K$ mit $c = d + s(c-a)$, also $d = a + (1-s)(c-a)$ und daher $1-s \in D$, während andererseits $1-s \geq 1-r+\frac{1}{k} \geq \frac{l+1}{k} \notin D$ und, weil D in $[0, 1]_K$ fallend ist, auch $1-s \notin D$ wäre. $X \setminus E$ ist also eine echte Teilmenge von B und liegt in $\text{Rep}(N, X)_{\text{aA}}$. Dies widerspricht der Minimalität von B und daher kann weder a noch - wie man ganz analog zeigt - c in C liegen.

Aus 4.6.6 und 5.3.1 ergibt sich nun:

5.3.2 Lemma: Ist ein Vektorraum X über einem archimedisch geordneten Körper K mit einer konvex-trennbaren, translationsinvarianten Topologie versehen, dann ist X extremal-reduzierend.

Aus 5.3.2, 4.6.1 und 4.6.5 folgt nun das wichtigste Ergebnis dieses Abschnitts

5.3.3 Satz: Ist ein Vektorraum X über einem archimedisch geordneten Körper K mit einer konvex-trennbaren, translationsinvarianten Topologie versehen, so gilt $\text{ext}(A) \neq \emptyset$ für jede kompakte, nicht-leere T_0 -Menge $A \subset X$.

Der klassische Fall, wo X ein lokal-konvexer topologischer $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist und A eine nicht leere, kompakte T_2 -Menge, ist wegen 4.6.2 eine unmittelbare Folge dieses Satzes. 5.3.3 ist jedoch wesentlich allgemeiner: Zum ersten braucht A nicht mehr T_2 sondern nur noch das schwächere Trennungsaxiom T_0 zu erfüllen. Zum zweiten muß der Skalarenkörper K nur noch archimedisch geordnet sein und braucht nicht mehr mit einer Topologie versehen zu werden, da zum dritten als einzige topologische Verträglichkeitsbedingung die Translationsinvarianz der Topologie von X , also die Stetigkeit von $x \rightarrow a+x$ für alle $a \in X$ benötigt wird. Was schließlich die Trennungseigenschaften angeht, so zeigen folgende beide, leicht zu beweisende Aussagen, daß das in 5.3.3 benötigte "konvex-trennbar" im allgemeinen schwächer sein wird als "lokal-konvex":

5.3.4 Lemma: Hat ein Vektorraum über einem geordneten Körper eine translationsinvariante Topologie, so ist er genau dann lokal-konvex, wenn in jeder Nullumgebung eine offene, konvexe Nullumgebung liegt.

5.3.5 Lemma: Hat ein Vektorraum über einem geordneten Körper eine translations- und spiegelinvariante Topologie, so ist er genau dann konvex-trennbar, wenn der Schnitt aller offenen, konvexen Nullumgebungen übereinstimmt mit dem Schnitt aller Nullumgebungen.

Man beachte, daß zum Beweis von 5.3.3 der Satz von Hahn-Banach nicht benötigt wurde. Die Unabhängigkeit von dessen spezielleren Voraussetzungen ist im Grunde genommen die Ursache für die über das Bekannte hinausgehende Allgemeinheit von 5.3.3.

Wegen 5.3.3 sind nun Vektorräume mit konvex-trennbarer Topologie von besonderem Interesse. Für sie gilt nun nach 4.6.3 eine Aussage, die bemerkenswerterweise falsch wird, wenn man in ihr "konvex-trennbar" jeweils durch "lokal-konvex" ersetzt:

5.3.6 Lemma: Ein Vektorraum über einem geordneten Körper ist bezüglich

einer Topologie konvex-trennbar, wenn es eine gröbere, konvex-trennbare T_0 -Topologie gibt.

Zum Abschluß nun noch drei Beispiele für Vektorräume, die die Voraussetzungen von 5.3.3 erfüllen, nicht aber schon lokal-konvexe topologische Vektorräume sind. Die beiden letzten Beispiele stammen von Herrn Dr. J.Köhn, dem ich dafür herzlich danke.

5.3.7 Beispiele:

1) T sei ein topologischer Raum und $\mathcal{C}(T)$ der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf T , versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Diese Topologie ist lokal-konvex, translations- und spiegelsinvariant. Topologischer Vektorraum ist $\mathcal{C}(T)$ allerdings nicht mehr unbedingt; wenn nämlich T nicht kompakt ist, ist $k \rightarrow k \cdot x$ im allgemeinen nicht stetig.

2) Ist $p \in]0, 1[_{\mathbb{R}}$, so bezeichnet l^p die Menge aller $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $r(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty$. r ist im Sinne von H.Schaefer [31, S.28] eine Pseudonorm und l^p daher ein topologischer $\mathbb{R}$ -Vektorraum. l^p ist jedoch nicht lokal-konvex, denn für jedes $k \in]0, \rightarrow[_{\mathbb{R}}$ hat die Kugel $\{x \in l^p : r(x) < k\}$ eine nicht beschränkte konvexe Hülle. l^p ist aber konvex-trennbar: nach M.Day [12, S.822, (6)] gilt nämlich $(l^p)' = l^\infty$ und je zwei Punkte aus l^p können daher durch eine stetige Linearform, also durch einen offenen Halbraum als spezielle, offene, konvexe Menge getrennt werden.

3) Sei X ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, versehen mit der endlich-offenen Topologie, d.h. eine Teilmenge ist genau dann offen, wenn ihr Durchschnitt mit jedem endlich-dimensionalen Teilraum $Y \subset X$ in der (einzigen) hausdorffschen Vektorraumtopologie von Y offen ist. Diese Topologie ist spiegelsinvariant und translationsinvariant, jedoch im Falle $\dim(X) \geq \aleph_0$ ist X kein topologischer Vektorraum mehr, weil dann nach S.Kakutani und V.Klee [20, S.55, th.] die Abbildung $(x, y) \rightarrow x+y$ nicht stetig ist. Wegen 5.3.6 ist die betrachtete Topologie konvex-trennbar, sie ist nämlich feiner als die feinste lokal-konvexe Topologie auf X .

Nach J.Dugundji [13, S.416, 4.3] ist die endlich-offene Topologie aber nicht lokal-konvex, wenn $\dim(X) \geq 2^{\aleph_0}$ gilt.

Zum Abschluß dieses Paragraphen noch ein einfaches topologisches Ergebnis, das bei Zugrundelegung der Bezeichnungen von 3.6 unmittelbar aus 4.6.4 und 4.6.5 folgt:

5.4 Satz: Jeder kompakte, nicht leere T_0 -Raum besitzt einen abgeschlossenen Punkt.

§ 6 Brave Abbildungen

Bisher haben wir immer einzelne Räume und deren durch eine Relation erzeugte Struktur untersucht. Nun sollen Abbildungen zwischen solchen Räumen betrachtet werden. Zuerst allerdings zwei

6.1 Vorbemerkungen

6.1.1: Sind X und M zwei Mengen, so wird das M -Tupel, dessen sämtliche M -Komponenten $= a \in X$ sind, mit a^M bezeichnet. Ist Y eine weitere Menge und $f : X \rightarrow Y$, so schreibt man $f(x) := (f(x_m))_{m \in M}$ für jedes M -Tupel $x = (x_m)_{m \in M}$ aus X .

6.1.2: Ist $(X, \leq)$ ein totalgeordneter Raum, so bezeichnet $t_+(X) = t_+$ die Topologie in X , die $\{]x, \rightarrow[_X : x \in X\}$ als Subbasis hat. t_+ ist eine T_0 -Topologie und, wenn X mindestens zweipunktig ist, nicht einmal eine T_1 -Topologie. Eine nicht leere Teilmenge von X ist genau dann kompakt, wenn sie ein kleinstes Element hat. Ist Y eine weitere Menge mit einer Topologie t , so ist eine Abbildung $f : Y \rightarrow X$ genau dann im übliche Sinne nach unten halbstetig, wenn f bezüglich der Topologien t und t_+ stetig ist (siehe hierzu etwa E. Čech [9, S. 320, 18 D.5]).

Wir betrachten nun folgende Situation:

(6.A) X und Y seien zwei Mengen und $f : X \rightarrow Y$. L sei eine weitere Menge und R_X , bzw. R_Y eine L -Relation in X , bzw. Y . A sei eine Teilmenge von X .

Es läßt sich nun eine erste interessante Funktionenklasse erklären:

6.2 Definition: Ist 6.A erfüllt, so heißt f (R_X, R_Y) -treu in A , wenn gilt:
 $x \in A^L, R_X(x) \implies R_Y(f(x))$.

Für die treuen Abbildungen gilt nun:

6.3 Lemma: Ist 6.A erfüllt, f (R_X, R_Y) -treu in A und $M \subset L$, so gilt für jedes $B \subset A$:

$$(1) B \cap f^{-1}(\text{Att}(R_Y, M, f(B))) \subset \text{Att}(R_X, M, B).$$

(2) Wenn f außerdem bijektiv und f^{-1} in $f(A)$ (R_Y, R_X) -treu ist, dann gilt:
 $f^{-1}(\text{Att}(R_Y, M, f(B))) = \text{Att}(R_X, M, B).$

Beweis:

(1) Sei $C \in \text{Att}(R_Y, M, f(B))$, $x \in B^L$, $R_X(x)$ und $x_M \in (f^{-1}(C))^M$. Zu zeigen ist $x \in (f^{-1}(C))^L$. Zuerst folgt, daß $f(x) \in f(B)^L$, $R_Y(f(x))$ und $f(x_M) \in C^M$ gilt. Da C M -attraktiv in $f(B)$ ist, folgt daraus $f(x) \in C^L$, also $x \in f^{-1}(C)^L$.

(2) Nach (1) gilt: $\text{Att}(R_X, M, B) \supset B \cap f^{-1}(\text{Att}(R_Y, M, f(B))) = f^{-1}(\text{Att}(R_Y, M, f(B)))$
 $\supset f^{-1}(f(B) \cap f(\text{Att}(R_X, M, B))) = \text{Att}(R_X, M, B).$

Beispiele für treue und für die nun zu definierenden zulässigen Abbildungen werden im nächsten Paragraphen behandelt. Betrachten wir nun eine andere Situation als 6.A:

(6.B) X sei eine Menge, $(Y, \leq)$ eine totalgeordnete Menge und $f : X \rightarrow Y$. Sei (L, M, N) ein Zerlegungstriplel, R eine L -Relation in X und A eine Teilmenge von X .

Jetzt läßt sich eine zweite Funktionenklasse erklären:

6.4 Definition: Ist 6.B erfüllt, so heißt f (R, M) -zulässig in A , wenn für jedes $x \in A^L$ mit $R(x)$ und $f(x_m) \leq f(x_n)$ für alle $(m, n) \in M \times N$ schon gilt:
 $f(x_m) = f(x_n)$ für alle $m, n \in L$.

Für die zulässigen Abbildungen gilt:

6.5 Lemma: Ist 6.B erfüllt, f (R, M) -zulässig in A und $B \subset A$, so daß $f(B)$ ein kleinstes Element a hat, dann gilt: $B \cap f^{-1}(a) \in \text{Att}(R, M, B).$

Beweis: Sei $x \in B^L$, $R(x)$ und $x_M \in (f^{-1}(a))^M$. Zu zeigen ist $x \in (f^{-1}(a))^L$. Zuerst folgt $f(x_m) = a^M$, da a kleinstes Element von $f(B)$ ist, gilt also $f(x_m) = a \leq f(x_n)$ für alle $(m, n) \in M \times N$ und wegen der Zulässigkeit von f ist dann $f(x_1) = a$. Also ist $f(x) = a^L$ und daher $x \in (f^{-1}(a))^L$, was gerade zu zeigen war.

Nun erklären wir eine Klasse von Funktionen, die sowohl die treuen als auch die zulässigen enthält:

6.6 Definition: X und Y seien zwei Mengen und $f : X \rightarrow Y$. (L_X, M_X, N_X) und (L_Y, M_Y, N_Y) seien zwei Zerlegungstripel. R_X sei eine L_X -Relation in X und R_Y eine L_Y -Relation in Y . f heißt (R_X, M_X, R_Y, M_Y) -brav in $A \subset X$, wenn für jedes $B \subset A$ und jeden in $f(B)$ bezüglich R_Y M_Y -attraktiven Punkt a die Menge $B \cap f^{-1}(a)$ bezüglich R_X M_X -attraktiv in B ist, also:

$$(1) B \subset A, a \in \text{att}(R_Y, M_Y, f(B)) \implies B \cap f^{-1}(a) \in \text{Att}(R_X, M_X, B).$$

Daß sowohl treue als auch zulässige Funktionen brav sind, zeigt

6.7 Satz:

(1) Sei 6.A erfüllt und f (R_X, R_Y) -treu in A . Sind $M, N \subset L$, so daß (L, M, N) ein Zerlegungstripel ist, und setzt man $(L_X, M_X, N_X) := (L_Y, M_Y, N_Y) := (L, M, N)$, so ist f (R_X, M_X, R_Y, M_Y) -brav in A .

(2) Sei 6.B erfüllt und f (R, M) -zulässig in A . Man setzt $(L_X, M_X, N_X) := (L, M, N)$, $(L_Y, M_Y, N_Y) := (\{1, 2\}, \{1\}, \{2\})$, $R_X := R$ und $R_Y := R_Y^{\leftarrow}$ (aus 3.2.1). Dann ist f (R_X, M_X, R_Y, M_Y) -brav in A .

Beweis:
.....

(1) folgt unmittelbar aus 6.3.1.

(2) $a \in \text{att}(R_Y, M_Y, f(B))$ in 6.6.1 bedeutet wegen 3.2.2 hier, daß $a \in \text{fal}(f(B))$ ist. Als fallender Punkt der totalgeordneten Menge $f(B)$ ist a das kleinste Element dieser Menge, die Behauptung folgt daher aus 6.5.

Für brave Funktionen gilt nun der folgende

6.8 Satz: X sei eine Menge, A eine mit einer Topologie versehene Teilmenge von X und F eine die Punkte von A trennende Menge von Abbildungen, so daß jedes $f \in F$ eine in A stetige Abbildung von X in einen T_0 -Raum Y_f ist. Es sei (L_X, M_X, N_X) ein Zerlegungstripel, ebenso (L_f, M_f, N_f) für jedes $f \in F$.

In X sei eine L_X -Relation R_X gegeben und für jedes $f \in F$ in Y_f eine L_f -Relation R_f , so daß Y_f M_f -attraktiv-reduzierend ist und f (R_X, M_X, R_f, M_f) -brav in A . Es gilt dann:

(1) A ist M_X -attraktiv-reduzierende T_0 -Menge.

(2) Ist A kompakt und nicht leer, dann gibt es einen bezüglich R_X in A M_X -attraktiven Punkt.

Beweis:
.....

(1) B sei eine kompakte, mindestens zweipunktige Teilmenge von A . Dann gibt es ein $f \in F$, das in B nicht konstant ist. Wegen 4.6.1 und 4.6.5 gibt es ein $a \in \text{att}(R_f, M_f, f(B))_a$ und nach 6.6.1 ist $B \neq B \cap f^{-1}(a) \in \text{Att}(R_X, M_X, B)_{aB}$; nach 4.6.4 ist A daher M_X -attraktiv-reduzierend. Da F die Punkte von A trennt und nur in A stetige Abbildungen in T_0 -Räume enthält, ist A eine T_0 -Menge.

(2) folgt mit (1) aus 4.6.5.

Da die Topologie t_+ aus 6.1.2 stets wachsend-trennbar, nach 5.1.6 also fallend-reduzierend ist, folgt mit 6.1.2 und 6.7.2 nun aus 6.8.2 unmittelbar für zulässige Funktionen folgendes

6.9 Korollar: X sei eine Menge, A eine mit einer kompakten Topologie versehene, nicht leere Teilmenge von X und F eine die Punkte von A trennende Menge von in A nach unten halbstetigen Abbildungen von X in totalgeordnete Räume. (L, M, N) sei ein Zerlegungstriple und R eine L -Relation in X , so daß jedes $f \in F$ in A (R, M) -zulässig ist. Dann gibt es einen M -attraktiven Punkt in A .

§ 7 Beispiele treuer und zulässiger Abbildungen

Wie in § 5 werden wir auch in diesem Paragraphen Aussagen über die Existenz ausgezeichneter Punkte machen. Diesmal stehen uns die Ergebnisse von § 6 zur Verfügung, die wir für spezielle brave Funktionen anwenden werden. Beginnen wir mit treuen Abbildungen:

7.1 Isotone Abbildungen

X und Y seien zwei Mengen, versehen mit zweistelligen Relationen, die wir beide mit $\sqsubseteq$ bezeichnen. In Verallgemeinerung der bei geordneten Mengen üblichen Definition erklären wir: $f : X \rightarrow Y$ heißt isoton, wenn für alle $a, b \in A$ mit $a \sqsubseteq b$ auch $f(a) \sqsubseteq f(b)$ gilt. Mit den Bezeichnungen aus 3.2, bzw. denen aus 3.3 und 1.9.1 folgt direkt aus 6.2:

7.1.1 Lemma: f isoton $\iff f (R_X^{\sqsubseteq}, R_Y^{\sqsubseteq})$ -treu in X .

7.1.2 Lemma: f isoton $\implies f (R_{\sqsubseteq}^X, R_{\sqsubseteq}^Y)$ -treu in X .

Es lassen sich nun leicht andere Aussagen als 5.1.7 über die Existenz fallender Punkte machen. Hierzu nur ein Beispiel, das wegen 7.1.1 mit 1.1.2, 3.2.2, 5.1.4, 5.1.6 und 6.7.1 aus 6.8.2 folgt:

7.1.3 Satz: $(X, \leq)$ sei ein nicht leerer, kompakter, geordneter Raum, dessen Punkte durch die stetigen, isotonen Abbildungen in fallend-abgeschlossene geordnete Räume getrennt werden. Dann gilt $\min(X) = \text{fal}(X) \neq \emptyset$.

7.2 Affine Abbildungen

X und Y seien zwei Vektorräume über einem geordneten Körper K . Mit den Bezeichnungen aus 1.5 und 3.3 gilt dann offenbar für jedes $f : X \rightarrow Y$:

7.2.1 Lemma: f affin $\implies f (R_X^K, R_Y^K)$ -treu in X .

(Die Umkehrung gilt übrigens nicht. Im Falle $X = Y = K = \mathbb{R}$ etwa sind alle streng isotonen Funktionen treu.) Aus 6.8.2 folgt nun zusammen mit 5.3.2 eine Aussage über die Existenz von Extrempunkten, die ganz anders als 5.3.3 ist:

7.2.2 Satz: X sei ein Vektorraum über einem archimedisch geordneten Körper K und A eine nicht leere, mit einer kompakten Topologie versehene Teilmenge von X , so daß die Punkte von A getrennt werden durch die in A stetigen, affinen Abbildungen von X in K -Vektorräume mit konvex-trennbare, translationsinvarianter T_0 -Topologie. Dann gilt $\text{ext}(A) \neq \emptyset$.

7.3 Halbgruppenhomomorphismen

$(X, \cdot)$ und $(Y, \cdot)$ seien zwei multiplikative Halbgruppen. Mit den Bezeichnungen aus 1.11 und 3.3 ist dann jeder injektive Halbgruppenhomomorphismus $f : X \rightarrow Y$ eine in $X (R_X^*, R_Y^*)$ -treue Abbildung.

7.4 Stetige Abbildungen

X und Y seien zwei topologische Räume, $\emptyset \neq M \supset X \cup Y$, $n \notin M$ und $(L, M, N) := (M \cup \{n\}, M, \{n\})$. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, so gilt für jedes $A \subset X$ und jedes $a \in \bar{A}$ auch $f(a) \in \overline{f(A)}$. Daraus folgt aber unter Beachtung der Definition der beiden L -Relationen R_X^{top} und R_Y^{top} in 3.6.1 gerade, daß dieses stetige f auch eine in $X (R_X^{\text{top}}, R_Y^{\text{top}})$ -treue Abbildung ist.

Nun auch Beispiele für zulässige Funktionen:

7.5 Konkave Funktionen

X sei ein Vektorraum über einem geordneten Körper K . f sei eine Abbildung von X in K , bzw. im Falle $K = \mathbb{R}$ sogar in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Ist $A \subset X$, so heißt f konkav in A , wenn für je drei Punkte $a, b, c \in A$, für die es ein $k \in]0, 1[_K$ mit $b = ka + (1-k)c$ gibt, $kf(a) + (1-k)f(c) \leq f(b)$ gilt. Mit den Bezeichnungen aus 1.5 und 3.3 gilt nun:

7.5.1 Lemma: f konkav in $A \implies f (R_{X,M}^K)$ -zulässig in A .

Beweis: Sei $x \in A^L$, $R_X^K(x)$ und $f(x_2) \leq f(x_1), f(x_3)$; es gibt dann also ein $k \in]0, 1[_K$ mit $x_2 = kx_1 + (1-k)x_3$ und daher folgt $f(x_2) \geq kf(x_1) + (1-k)f(x_3) \geq kf(x_2) + (1-k)f(x_2) = f(x_2)$. In dieser Ungleichungskette muß überall $=$ stehen. Ist

dieser gemeinsame Wert $= +\infty$, was ja nur bei $K = \mathbb{R}$ eintreten kann, so gilt $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ wegen $f(x_2) \leq f(x_1), f(x_3)$. Ist dagegen dieser Wert endlich, so folgt, da k und $1-k$ von 0 verschieden sind, $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ aus der Gleichungskette. Damit ist alles gezeigt.

Neben 5.3.3 und 7.2.2 können wir nun noch eine dritte Aussage über die Existenz von Extrempunkten machen. Aus 6.9 folgt mit 7.5.1 (vgl. H.Bauer [2, S. 392, Satz 2]):

7.5.2 Satz: Ist X ein Vektorraum über einem geordneten Körper K und A eine nicht leere, mit einer kompakten Topologie versehene Teilmenge von X , so daß die in A konkaven und nach unten halbstetigen Funktionen die Punkte von A trennen, dann gilt $\text{ext}(A) \neq \emptyset$.

7.6 Fan-konkave Funktionen

Wie in 1.10 sei X eine Menge und F eine Menge von Abbildungen von X in totalgeordnete Mengen. Ist f eine weitere Abbildung von X in einen totalgeordneten Raum $(Y, \leq)$, so erklären wir unter Zugrundelegung der Bezeichnungen aus 1.10 und 3.3 für jedes $A \subset X$:

7.6.1 Definition: f F-Fan-konkav in A : $\iff f$ (R_F, M) -zulässig in A .

f ist also genau dann F-Fan-konkav in A , wenn für jedes $x \in A^L$ mit $R_F(x)$ und $f(x_2) \leq f(x_1), f(x_3)$ schon $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ gilt. Diese Funktionen werden schon von B.Khanh [21, S.192 und 193] untersucht. Aus 1.10.1 ergibt sich unmittelbar:

7.6.2 Lemma: Jedes $f \in F$ ist F-Fan-konkav in X .

Aus 7.6.1 und 6.9 folgt nun ein Satz über die Existenz fanscher Punkte (unter spezielleren Voraussetzungen in einem Ergebnis von K.Fan [15, S.216, th.4] enthalten):

7.6.3 Satz: X sei eine Menge, F eine Menge von Abbildungen von X in totalgeordnete Räume und A eine nicht leere, mit einer kompakten Topologie versehene Teilmenge von X , deren Punkte getrennt werden durch die in A F-

Fan-konkaven und nach unten halbstetigen Funktionen. Es gilt dann $\text{fan}_F(A) \neq \emptyset$.

7.7 $\mathcal{V}$ -konkave Funktionen

Wie in 3.4 sei X eine Menge, $\mathcal{V} \subset X \times \mathcal{P}(X)$ und zudem f eine Abbildung von X in einen totalgeordneten Raum $(Y, \leq)$. Ist $A \subset X$, so erklären wir nach H.Bauer [1, S.14]:

7.7.1 Definition: f heißt $\mathcal{V}$ -konkav in A , wenn gilt: Ist $t \in A$, $T \subset A$,

$(t, T) \in \mathcal{V}$ und $f(t) \leq f(s)$ für alle $s \in T$, so gilt $f(t) = f(s)$ für alle $s \in T$.

Der Vergleich dieser Definition mit 6.4 liefert bei Berücksichtigung von 3.4.2 und bei Zugrundelegung der Bezeichnungen von 3.4:

7.7.2 Lemma: $\mathcal{V}$ -konkav = $(R_{\mathcal{V}}, M)$ -zulässig.

Nach 6.9 läßt sich nun die Existenz von $\mathcal{V}$ -extremalen Punkten nachweisen (siehe H.Bauer [3, S.201, Satz 1]):

7.7.3 Satz: X sei eine Menge, $\mathcal{V} \subset X \times \mathcal{P}(X)$ und A eine nicht leere, mit einer kompakten Topologie versehene Teilmenge von X , deren Punkte getrennt werden durch die in A nach unten halbstetigen und $\mathcal{V}$ -konkaven Funktionen von X in totalgeordnete Mengen. Dann ist $\text{ext}_{\mathcal{V}}(A) \neq \emptyset$.

7.8 Choquet-konkave Funktionen

Es liege wieder die Situation aus 3.5 vor. X sei also ein topologischer Raum und F eine Menge von Abbildungen von X in $\overline{\mathbb{R}}$. Eine weitere Abbildung $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sei gegeben sowie ein $A \subset X$. Wir erklären nun:

7.8.1 Definition: f heißt F-Choquet-konkav in A , wenn es in A den Wert $-\infty$ nicht annimmt, in A nach unten halbstetig ist und wenn $\int^* f d\omega \leq f(x)$ für jedes $x \in A$ und jedes $\omega \in W(x)$ mit $\text{Tr}(\omega) \subset A$ gilt.

Eine dieser Funktionenklasse ganz ähnliche definiert D.Edwards in [14, S.16]. Aus der Definition von $W(x)$ und aus 7.8.1 sieht man unmittelbar:

7.8.2 Lemma: Ist ein $f \in F$ in A nach unten halbstetig und nimmt dort den Wert $-\infty$ nicht an, dann ist es F-Choquet-konkav in A .

Nun zeigen wir, daß "Choquet-konkav" ein Spezialfall von " $\mathcal{V}$ -extremal", nach 7.7.2 also auch von "zulässig" ist. Nehmen wir das in 3.5 definierte spezielle $\mathcal{V}$, so gilt:

7.8.3 Lemma: Ist f F-Choquet-konkav in A , so ist es auch $\mathcal{V}$ -konkav in A .

Beweis: Ist $t \in A$, $T \subset A$, $(t, T) \in \mathcal{V}$ und $f(t) \leq f(s)$ für alle $s \in T$, so gibt es insbesondere ein $w \in W(t)$ mit $T = \text{Tr}(w)$. Zu zeigen ist, daß f in jedem Punkt von $\text{Tr}(w)$ den Wert $f(t)$ hat. Im Falle $f(t) = +\infty$ ist das trivial. Sei $f(t)$ nun also endlich. Zuerst gilt $f(t) \leq \int_T^* f dw = \int^* f dw \leq f(t)$, also $f(t) = \int^* f dw$. Wegen $w(\text{Tr}(w)) = 1$ ergibt sich daraus $\int^* (f - f(t)) dw = 0$. Da $f - f(t)$ in $\text{Tr}(w)$ nach unten halbstetig und ≥ 0 ist, folgt nach N.Bourbaki [8, S.117, prop.3], daß f auf $\text{Tr}(w) = T$ konstant $= f(t)$ ist.

Aus 7.8.3 und 7.7.3 folgt nun eine Aussage über die Existenz choquetscher Punkte (vgl. H.Bauer [3, S.203, Satz 2]):

7.8.4 Satz: X sei ein topologischer Raum, A eine nicht leere, kompakte Teilmenge und F eine Menge von Abbildungen von X in $\overline{\mathbb{R}}$. Wenn die in A F-Choquet-konkaven Funktionen die Punkte von A trennen, dann ist $\text{cho}_F(A) \neq \emptyset$.

Kapitel II: Hüllen ausgezeichneter Punkte

§ 8 Hüllen und Ränder

Viele der Hüllenbegriffe, die man in den verschiedensten Gebieten der Mathematik findet, lassen sich als Spezialfälle folgender allgemeinen Situation verifizieren:

8.1 Definition: X sei eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Für jedes $A \subset X$ setzt man $A_{\mathcal{A}} := \bigcap \{B \in \mathcal{A} : B \supset A\}$ und nennt diese Menge die $\mathcal{A}$ -Hülle von A . Die $\mathcal{A}$ -Hülle von A ist also der Schnitt aller Mengen aus $\mathcal{A}$, die A enthalten. Unmittelbar aus der Definition folgt ein erstes

8.2 Lemma: Ist $B \subset A \subset X$ und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, so gilt $B_{\mathcal{A}} \subset A_{\mathcal{A}}$.

Nun kann es aber durchaus geschehen, daß hier sogar $B_{\mathcal{A}} = A_{\mathcal{A}}$ gilt. Anschaulich gesprochen heißt das, daß B noch die ganze $\mathcal{A}$ -Hülle von A aufspannt. Dies gibt den Anlaß zur folgenden

8.3 Definition: Sind A , B und X drei Mengen mit $B \subset A \subset X$, ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und gilt $B_{\mathcal{A}} = A_{\mathcal{A}}$, dann heißt B ein $\mathcal{A}$ -Rand von A .

Es gilt nun:

8.4 Lemma: Sind A , B und X drei Mengen mit $B \subset A \subset X$ und ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, so ist B genau dann ein $\mathcal{A}$ -Rand von A , wenn gilt: $C \in \mathcal{A}, C \not\supset A \implies C \not\supset B$.

Beweis: Daß B ein $\mathcal{A}$ -Rand von A ist, ist wegen 8.2 gleichbedeutend mit $B_{\mathcal{A}} \supset A_{\mathcal{A}}$; diese Aussage lautet ausführlich geschrieben: $\bigcap \{C \in \mathcal{A} : C \supset B\} \supset \bigcap \{C \in \mathcal{A} : C \supset A\}$. Gleichbedeutend hiermit ist, daß für jedes $C \in \mathcal{A}$ mit $C \supset B$ auch $C \supset A$ gilt. Die hierzu äquivalente negative Aussage ist gerade die Bedingung aus 8.4: $C \in \mathcal{A}, C \not\supset A \implies C \not\supset B$.

Einerseits ist A nach 8.3 stets ein $\mathcal{A}$ -Rand von sich selbst, andererseits

folgt aus 8.2:

8.5 Lemma: Sind A, B, C und X vier Mengen mit $C \subset B \subset A \subset X$ und ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und C ein $\mathcal{A}$ -Rand von A , so ist auch B ein $\mathcal{A}$ -Rand von A .

Das besagt also gerade, daß die Eigenschaft, ein $\mathcal{A}$ -Rand von A zu sein, nach oben erblich ist im System $\mathcal{P}(A)$. Man kennt also alle $\mathcal{A}$ -Ränder von A , wenn man alle "kleinen" $\mathcal{A}$ -Ränder von A kennt, und übersieht die Gesamtheit aller $\mathcal{A}$ -Ränder um so besser, je kleinere $\mathcal{A}$ -Ränder von A man kennt. Wie problematisch die Suche nach möglichst kleinen Rändern werden kann, zeigt schon ein einfaches

8.6 Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{A} = \text{Kon}(X)_a$, also das System aller abgeschlossenen, konvexen Teilmengen von X . $\mathcal{A}$ -Hülle bedeutet dann gerade abgeschlossene konvexe Hülle. Ist A eine abgeschlossene Kreisscheibe in X und S die zugehörige Kreislinie, so ist nach den Sätzen von Milman und Krein-Milman $B \subset A$ genau dann ein $\mathcal{A}$ -Rand von A , wenn $\overline{B} \supset S$ gilt. Aus jedem $\mathcal{A}$ -Rand von A kann man daher abzählbar-unendlichviele Punkte weglassen, so daß die Restmenge wieder ein $\mathcal{A}$ -Rand von A ist.

Im allgemeinen gibt es also weder einen kleinsten Rand noch minimale Ränder, ja es kann sogar vorkommen, daß man aus jedem Rand unendlichviele Punkte weglassen kann, so daß die verbleibende Menge immer noch Rand ist. Es ist daher sinnvoll, die Suche nach möglichst kleinen Rändern insofern einzuschränken, daß diese Ränder zudem noch angenehme Eigenschaften haben sollen. Im Rest dieser Arbeit wird das meist bedeuten, daß die Ränder einfache Darstellungen haben, daß sie etwa nur aus attraktiven Punkten (im Spezialfall z.B. Extrempunkten) bestehen.

Zur weiteren Veranschaulichung der Begriffe Rand und Hülle nun einige Beispiele:

8.7 Abgeschlossene Hülle und dichte Mengen

X sei ein topologischer Raum und $\mathcal{A}$ das System aller abgeschlossenen Mengen von

X . $\mathcal{A}$ -Hülle bedeutet dann gerade abgeschlossene Hülle und $A \subset X$ ist genau dann ein $\mathcal{A}$ -Rand von X , wenn A in X dicht liegt.

8.8 Basen eines Vektorraums

X sei ein Vektorraum und $\mathcal{A}$ das System seiner Teilräume. Die $\mathcal{A}$ -Hülle eines $A \subset X$ ist dann gerade der von A erzeugte Vektorraum. Hier gibt es minimale $\mathcal{A}$ -Ränder von X und das sind genau die Vektorraumbasen von X .

8.9 Subbasen einer Topologie

T sei eine Menge, $X = \mathcal{P}(T)$ und $\mathcal{A}$ das System aller Topologien (als Gesamtheiten offener Mengen) auf T . In dieser Situation ist B genau dann ein $\mathcal{A}$ -Rand von $A \in \mathcal{A}$, wenn B eine Subbasis von A ist.

Für das Folgende besonders wichtig ist das nun kommende Beispiel:

8.10 Attraktive Hülle

Sei X eine Menge, (L, M, N) ein Zerlegungstripel und R eine L -Relation in X . Als N -attraktive Hülle von $A \subset X$ bezeichnet man $A_{Att(N, X)}$, also die $Att(N, X)$ -Hülle von A . Wegen 2.4.3 und 2.4.6 gilt:

8.10.1 Lemma: Die N -attraktive Hülle von $A \subset X$ ist die kleinste N -attraktive Menge in X , die A enthält.

In den Beispielen des § 3 wird daraus: wachsende Hülle, invariante Hülle, R -konvexe Hülle, konvexe Hülle (auch p -konvexe Hülle, absolut-konvexe Hülle und absolut p -konvexe Hülle), metrisch-konvexe Hülle, intervallartige Hülle, multiplikationsstabile Hülle und schließlich (vgl. 8.7) abgeschlossene Hülle. Aus 2.4.11 und 2.4.2 folgt nun:

8.10.2 Lemma: Ist M einpunktig und A N -attraktiv in X , so liegen in jedem $Att(N, X)$ -Rand von A alle in A M -attraktiven Punkte.

Nun soll ein für das Rechnen mit Hüllen und Rändern im Folgenden äußerst nützlicher Begriff eingeführt werden, den wir aber zuerst durch eine heuristische Betrachtung motivieren wollen:

X sei ein lokal-konvexer, hausdorffscher topologischer $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $\mathcal{B} = \text{Kon}(X)_A$. Für eine nicht leere, kompakte, konvexe Teilmenge A von X definieren wir dann:

$$\mathcal{A} := \begin{cases} \text{entweder } \{\text{alle abgeschlossenen Stützhyperebenen von } A\}, \\ \text{oder } \{\text{alle minimalen Stützkanten von } A\}, \\ \text{oder } \{\{a\} : a \text{ Extrempunkt von } A\}. \end{cases}$$

In jedem dieser drei Fälle gilt dann: $B \subset A, \mathcal{A}_B = \mathcal{A}_A \implies B_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}$.

D.h. wenn ein $B \subset A$ jeden $\mathcal{A}$ -Treffer von A trifft, dann hat es dieselbe $\mathcal{B}$ -Hülle wie A , ist also ein $\mathcal{B}$ -Rand von A . (Im ersten Fall gilt die Behauptung nach N.Bourbaki [7, S.108, cor., $b \Rightarrow a$], im zweiten nach G.Köthe [24, S.340, (2)] und im dritten nach dem Satz von Krein-Milman.)

Daher folgende

8.11 Definition: Ist X eine Menge, sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Teilsysteme von $\mathcal{P}(X)$ und ist $A \subset X$, so heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein A-brauchbares Paar, wenn gilt:

$$(1) B \subset A, \mathcal{A}_B = \mathcal{A}_A \implies B_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}.$$

Wenn hierbei speziell $\mathcal{A} = \{\{a\} : a \in C\}$ für ein $C \subset X$ ist, so sagt man auch, daß $(C, \mathcal{B})$ A-brauchbar ist. (Dies darf nicht mit der A-Brauchbarkeit von $(\{C\}, \mathcal{B})$ verwechselt werden.)

Bevor wir nun die Eigenschaften der brauchbaren Paare zusammenstellen, noch einen weiteren Begriff, der beim Vergleich verschiedener Hüllen ein und derselben Menge eine Rolle spielt:

8.12 Definition: Ist X eine Menge und sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Teilsysteme von X , so schreibt man $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$ und sagt, daß $\mathcal{A}$ stärker als $\mathcal{B}$ ist, wenn gilt:
Zu jedem $B \in \mathcal{B}$ und jedem $a \notin B$ gibt es ein $A \in \mathcal{A}$ mit $a \notin A \supset B$.

Nun zu den Eigenschaften des Begriffes A-brauchbar:

8.13 Satz: Seien A und X zwei Mengen mit $A \subset X$. Es gilt:

(1) Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, so ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ genau dann A-brauchbar, wenn gilt:

$B \subset A$, $\mathcal{A}_B = \mathcal{A}_A$, $C \in \mathcal{B}$, $C \not\supset A \implies C \not\supset B$.

(2) Ist $A \subset B \subset X$ und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, dann ist $(\mathcal{A}, B \setminus \mathcal{A})$ A-brauchbar.

(3) Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $A \cap C \subset A \cap B$ und ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ A-brauchbar, dann ist auch $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ A-brauchbar.

(4) Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $B \supset C$ und ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ A-brauchbar, dann ist auch $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ A-brauchbar.

(5) Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $C \supset \mathcal{A}$ und ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ A-brauchbar, dann ist auch $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ A-brauchbar.

(6) Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, so ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ genau dann A-brauchbar, wenn $(\mathcal{A}_A, \mathcal{B})$ A-brauchbar ist.

(7) Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ und ist $\mathcal{A}_A$ $\cap$ -induktiv, so ist $(\mathcal{A}_A, \mathcal{B})$ genau dann A-brauchbar, wenn $(\mathcal{A}_{Am}, \mathcal{B})$ A-brauchbar ist.

(8) Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ und ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ A-brauchbar, dann ist auch $(A \cap \mathcal{A}, \mathcal{B})$ A-brauchbar.

(9) Ist f eine Abbildung von X in eine Menge Y , sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ und ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ $f(A)$ -brauchbar, dann ist $(f^{-1}(\mathcal{A}), f^{-1}(\mathcal{B}))$ A-brauchbar.

(10) Sind für jedes Element i einer Menge I die Systeme $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i \subset \mathcal{P}(X)$ derart, daß $(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$ A-brauchbar ist, dann ist auch das Paar $(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i, \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i)$ A-brauchbar.

(11) Ist $B \subset X$ und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, so ist $(B, \mathcal{A})$ genau dann A-brauchbar, wenn $A \cap B$ ein $\mathcal{A}$ -Rand von A ist.

Beweis:
.....

(1) folgt aus 8.4.

(2) Sei $C \subset A$, $\mathcal{A}_C = \mathcal{A}_A$, $D \in B \setminus \mathcal{A}$ und $D \not\supset A$. Nach (1) genügt es $D \not\supset C$ zu zei-

gen. Es gibt ein $E \in \mathcal{A}$ mit $D = B \setminus E$. Wegen $D \not\supset A$ gibt es ein $a \in A$ mit $a \notin D$, also $a \in E$. Daraus folgt $E \in \mathcal{A}_A = \mathcal{A}_C$, also $E \cap C \neq \emptyset$. Daher gibt es ein $b \in C$ mit $b \in E$, also $b \notin D$. Daraus folgt, was zu zeigen war, $D \not\supset C$.

(3) Sei $B \subset A$, $\mathcal{A}_B = \mathcal{A}_A$, $C \in \mathcal{C}$ und $C \not\supset A$. Nach (1) genügt es $C \not\supset B$ zu zeigen. Wegen $C \not\supset A$ gilt $C \cap A \neq A$ und nach Voraussetzung gibt es dann ein $D \in \mathcal{B}$ mit $C \cap A = D \cap A \neq A$, also $D \not\supset A$, woraus nach (1) wegen der A-Brauchbarkeit von $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ nun $D \not\supset B$ folgt. Dann gilt aber $C \cap B = (C \cap A) \cap B = (D \cap A) \cap B \neq B$ und daraus folgt, was zu zeigen war, $C \not\supset B$.

(4) Sei $B \subset A$, $\mathcal{A}_A = \mathcal{A}_B$, $C \in \mathcal{C}$ und $C \not\supset A$. Nach (1) genügt es $C \not\supset B$ zu zeigen. Wegen $C \not\supset A$ gibt es ein $a \in A$ mit $a \notin C$. Nach 8.12 gibt es ein $D \in \mathcal{B}$ mit $D \supset a$ und $a \notin D$, also $D \not\supset A$. Da $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ A-brauchbar ist, gilt daher nach (1) $D \not\supset B$, und weil $D \supset C$ ist, gilt dann auch $C \not\supset B$.

(5) Sei $B \subset A$ und $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}_A$. Nach 8.11.1 genügt es $B_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}$ zu zeigen. Wegen $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$ gilt auch $\mathcal{A}_B = \mathcal{A}_A$. Da $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ A-brauchbar ist, folgt daraus $B_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}$.

(6) Wegen (5) bleibt das "nur dann" zu zeigen. Dies folgt aber wegen $(\mathcal{A}_A)_{\mathcal{B}} = \mathcal{A}_B$ und $(\mathcal{A}_A)_A = \mathcal{A}_A$ unmittelbar aus der Definition 8.11.

(7) Wegen (5) bleibt das "nur dann" zu zeigen. Sei also $(\mathcal{A}_A, \mathcal{B})$ A-brauchbar, $B \subset A$ und $(\mathcal{A}_{Am})_{\mathcal{B}} = (\mathcal{A}_{Am})_A (= \mathcal{A}_{Am})$. Wir haben $B_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}$ nachzuweisen. Da B jedes minimale Element aus $\mathcal{A}_A$ trifft und da nach dem Zornschen Lemma in jeder Element des $\cap$ -induktiven Systems $\mathcal{A}_A$ ein minimales liegt, trifft B jedes Element aus $\mathcal{A}_A$, d.h. $(\mathcal{A}_A)_{\mathcal{B}} = \mathcal{A}_A = (\mathcal{A}_A)_A$. Weil $(\mathcal{A}_A, \mathcal{B})$ A-brauchbar ist, folgt daraus das zu zeigende $B_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}$.

(8) Sei $B \subset A$ und $(A \cap \mathcal{A})_A = (A \cap \mathcal{A})_B$. Zu zeigen ist $B_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}$. Wegen $B \subset A$ folgt $\mathcal{A}_A = \mathcal{A}_B$, da $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ A-brauchbar ist, gilt daher $B_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}$.

(9) Sei $B \subset A$, $(f^{-1}(\mathcal{A}))_{\mathcal{B}} = (f^{-1}(\mathcal{A}))_A$, $C \in f^{-1}(\mathcal{B})$ und $C \not\supset A$. Nach (1) genügt es $C \not\supset B$ zu zeigen. $(f^{-1}(\mathcal{A}))_{\mathcal{B}} = (f^{-1}(\mathcal{A}))_A$ bedeutet ausführlich geschrieben

gerade $\{f^{-1}(D) : D \in \mathcal{A}, f^{-1}(D) \cap B \neq \emptyset\} = \{f^{-1}(D) : D \in \mathcal{A}, f^{-1}(D) \cap A \neq \emptyset\}$. Offenbar gilt für jedes $D \subset Y$ und jedes $E \subset X$: $f^{-1}(D) \cap E \neq \emptyset \iff D \cap f(E) \neq \emptyset$. Aus der letzten Gleichung folgt hiermit: $\{D \in \mathcal{A} : D \cap f(B) \neq \emptyset\} = \{D \in \mathcal{A} : D \cap f(A) \neq \emptyset\}$, also $\mathcal{A}_{f(B)} = \mathcal{A}_{f(A)}$. Nun gibt es noch ein $F \in \mathcal{B}$ mit $f^{-1}(F) \cap C$ und aus $f^{-1}(F) \not\subset A$ folgt dann $F \not\subset f(A)$. Da $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ $f(A)$ -brauchbar ist, folgt also $F \not\subset f(B)$ nach (1). Es gibt also ein $a \in B$ mit $f(a) \notin F$ und daher ist $a \notin f^{-1}(F) = C$, woraus $C \not\subset B$ folgt.

(10) Sei $B \subset A$, $(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i)_B = (\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i)_A$, $C \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ und $C \not\subset A$. Nach (1) genügt es $C \not\subset B$ zu zeigen. Zuerst sieht man, daß $(\mathcal{A}_i)_B = (\mathcal{A}_i)_A$ sein muß für jedes $i \in I$. Es gibt ein $j \in I$ mit $C \in \mathcal{B}_j$. Da $(\mathcal{A}_j)_B = (\mathcal{A}_j)_A$ ist und $C \not\subset A$, ergibt sich nun mit (1), weil $(\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j)$ A -brauchbar ist, die Behauptung $C \not\subset B$.

(11) Es wird $\mathcal{B} := \{\{a\} : a \in B\}$ gesetzt.

"dann": Sei $A \cap B$ ein $\mathcal{A}$ -Rand von A , $C \subset A$ und $\mathcal{B}_C = \mathcal{B}_A$. Es ist $C_{\mathcal{A}} = A_{\mathcal{A}}$ zu zeigen. $\mathcal{B}_C = \mathcal{B}_A$ bedeutet gerade $B \cap C = B \cap A$. Da $A \cap B$ ein $\mathcal{A}$ -Rand von A ist, folgt daraus $(B \cap C)_{\mathcal{A}} = (B \cap A)_{\mathcal{A}} = A_{\mathcal{A}}$. Nach 8.2 ist daher $C_{\mathcal{A}} = A_{\mathcal{A}}$.

"nur dann": $(B, \mathcal{A})$ sei A -brauchbar, das heißt also, daß $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ A -brauchbar ist. Aus $\mathcal{B}_{A \cap B} = \{\{a\} : a \in A \cap B\} = \mathcal{B}_A$ folgt daher $(A \cap B)_{\mathcal{A}} = A_{\mathcal{A}}$, $A \cap B$ ist also ein $\mathcal{A}$ -Rand von A .

Zum Schluß nun noch ein sich direkt aus 8.13.4 und 8.13.11 ergebendes

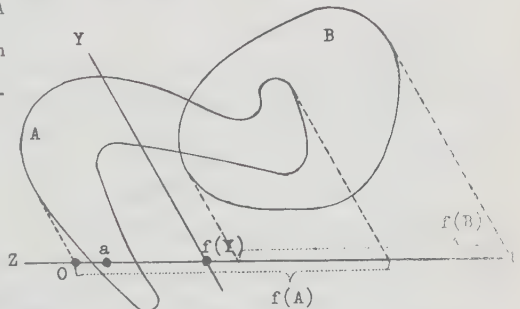
8.14 Lemma: Sind A, B und X drei Mengen mit $B \subset A \subset X$, sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$ und ist B ein $\mathcal{A}$ -Rand von A , dann ist B auch ein $\mathcal{B}$ -Rand von A .

§ 9 Der Satz von Minkowski und zwei Varianten

Um die Nützlichkeit der Begriffe Rand, treue Abbildung und brauchbar zu zeigen, werden wir mit ihrer Hilfe nun zuerst den Satz von Minkowski (vgl. H.Minkowski [26, S.160]) beweisen und ihn dann dazu verwenden, um ganz analoge Sätze für die aus der Geometrie bekannten sphärischen und hyperbolischen Räume zu zeigen; dort scheinen entsprechende Untersuchungen bisher noch nicht durchgeführt worden zu sein.

9.1 Satz von Minkowski: Sei $n \in \mathbb{N}$, X ein n -dimensionaler, hausdorffscher topologischer $\mathbb{R}$ -Vektorraum und A eine kompakte Teilmenge in X . Dann haben A und die Menge der Extrempunkte von A dieselbe konvexe Hülle, d.h. $\text{ext}(A)$ ist ein $\text{Kon}(X)$ -Rand von A ; wenn A konvex ist, ist $\text{ext}(A)$ sogar der kleinste $\text{Kon}(X)$ -Rand von A .

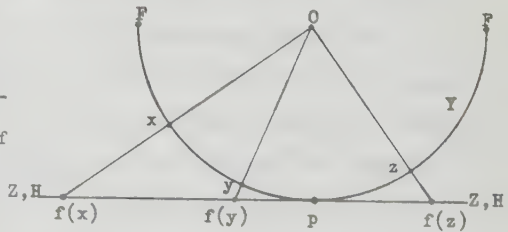
Beweis: Die Behauptung wird durch vollständige Induktion gezeigt. Für $n = 0$ ist sie trivialerweise richtig. Die Aussage sei nun für alle natürlichen Zahlen bis $n-1$ bewiesen. Sei $B \in \text{Kon}(X)$ mit $B \not\supset A$. Nach 8.4 genügt es dann $B \not\supset \text{ext}(A)$ zu zeigen. Es gibt ein $a \in A$ mit $a \notin B$ und dieses läßt sich nach V.Klee [22, S.456, 8.10] durch eine Hyperebene Y von B trennen. f bezeichne die nach N.Bourbaki [7, S.19, cor.2] stetige Projektion von X längs Y auf eine Gerade Z durch a , die Y trifft, aber nicht in Y enthalten ist. Auf Z werden daher $f(B)$ und a durch $f(Y)$ getrennt. Da die kompakte Teilmenge $f(A)$ der Geraden Z zwei äußerste Punkte besitzt, wird einer von ihnen, den wir o.B.d.A. als 0 annehmen können, durch $f(Y)$ von $f(B)$ getrennt. Es gilt $0 \in \text{ext}(f(A))$, nach 7.2.1 und 6.3.1 ist also $C := A \cap f^{-1}(0) \in$



$\text{Ext}(A)_A$. Ist $0 \notin f(B)$, so gilt $C \cap B = \emptyset$, ist $0 \in f(B)$, so ist $a \in C$; in beiden Fällen ist also $D := B \cap f^{-1}(0) \not\subset A \cap f^{-1}(0) = C$, wobei D eine konvexe und C eine kompakte Teilmenge des $(n-1)$ -dimensionalen, hausdorffschen topologischen $\mathbb{R}$ -Vektorraums $f^{-1}(0)$ ist. Nach Induktionsannahme gibt es wegen 8.4 ein $b \in \text{ext}(C)$ mit $b \notin D$. Wegen 2.4.2 gilt daher $b \in \text{ext}(A)$, aber $b \notin B$. Also ist $B \not\subset \text{ext}(A)$, was zu zeigen war. Der Rest der Behauptung folgt aus 8.10.2.

2.2 Satz von Minkowski für sphärische Räume: (X, m) sei der n -dimensionale sphärische Raum (X ist also die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$ und als Abstand $m(x, y)$ hat man für $x \neq y$ gerade die Länge des kleineren der beiden x und y verbindenden Großkreisbögen; siehe etwa W. Rinow [30, S.4]). Ist A eine kompakte Menge in X , die ganz in einer offenen Halbsphäre Y von X liegt, so haben A und die Menge aller metrisch-extremalen Punkte von A dieselbe metrisch-konvexe Hülle, d.h. $\text{mex}(A)$ ist ein $\text{Mko}(X)$ -Rand von A ; wenn A metrisch-konvex ist, so ist $\text{mex}(A)$ sogar der kleinste $\text{Mko}(X)$ -Rand von A .

Beweis: Y habe als topologischen Rand in X die $(n-1)$ -dimensionale Sphäre F . p sei der zu F in X gehörige Pol, der in Y liegt, und Z die n -dimensionale Tangentialhyperebene an X im Punkte p . Für jedes $x \in Y$ sei $f(x)$ der Schnittpunkt der Geraden durch O und x mit Z . $f : Y \rightarrow Z$ ist bijektiv. Ist G ein Großkreis in X mit $G \not\subset F$, so wird durch ihn ein zweidimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^{n+1}$ bestimmt, der Z in einer Geraden H schneidet. Offenbar gilt $H = f(G \cap Y)$ und wenn für drei Punkte x, y und z aus Y der Punkt y auf dem Großkreis G zwischen x und z liegt, so liegt $f(y)$ auf der Geraden H zwischen $f(x)$ und $f(z)$. Das aber bedeutet mit den Bezeichnungen aus 1.5, 1.7 und 3.3, daß $f : (R_Y^m, R_Z^R)$ -treu in Y ist. Ganz analog überlegt man sich, daß $f^{-1} : (R_Z^R, R_Y^m)$ -treu in Z ist. Da f stetig ist, ist $f(A)$ kompakt und nach 9.1 ist



ist deshalb $\text{ext}(f(A))$ ein $\text{Kon}(Z)$ -Rand von $f(A)$. Nach 8.13.11 ist daher $(\text{ext}(f(A)), \text{Kon}(Z))$ $f(A)$ -brauchbar und wegen 8.13.9 ist dann $(f^{-1}(\text{ext}(f(A))), f^{-1}(\text{Kon}(Z)))$ A -brauchbar. Nach 6.3.2 bedeutet das aber gerade, daß $(\text{mex}(A), \text{Mko}(Y))$ A -brauchbar ist. Wegen 2.4.1 gilt $A \cap \text{Mko}(X) = A \cap (Y \cap \text{Mko}(X)) \subseteq A \cap \text{Mko}(Y)$. Nach 8.13.3 ist daher $(\text{mex}(A), \text{Mko}(X))$ A -brauchbar und wegen 8.13.11 ist $\text{mex}(A)$ dann ein $\text{Mko}(X)$ -Rand von A . Der Rest der Aussage folgt aus 8.10.2.

9.3 Bemerkung: 9.2 wird falsch, wenn man von A nicht mehr verlangt, daß es in einer offenen Halbsphäre liegt. Das zeigen schon die abgeschlossene Halbsphäre oder die Vollsphäre; diese beiden Mengen besitzen nämlich keine metrisch-extremalen Punkte.

9.4 Satz von Minkowski für hyperbolische Räume: (X, m) sei der n -dimensionale hyperbolische Raum (X ist also das Innere der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ und m die - z.B. bei W.Rinow in [30, S.6] definierte - hyperbolische Metrik). Ist A eine kompakte Teilmenge in X , so haben A und die Menge der metrisch-extremalen Punkte von A dieselbe metrisch-konvexe Hülle, d.h. $\text{mex}(A)$ ist ein $\text{Mko}(X)$ -Rand von A ; wenn A metrisch-konvex ist, so ist $\text{mex}(A)$ sogar der kleinste $\text{Mko}(X)$ -Rand von A .

Beweis: f sei die identische Abbildung in X . Wird der Definitionsbereich mit der durch die hyperbolische Metrik induzierten Topologie versehen und der Wertebereich mit der $\mathbb{R}^n$ -Topologie, dann ist f stetig (siehe z.B. W.Rinow [30, S. 14]). A ist also auch in der $\mathbb{R}^n$ -Topologie kompakt, nach 9.1 ist deshalb $\text{ext}(A)$ ein $\text{Kon}(Y)$ -Rand von A für $Y := \mathbb{R}^n$. Nach 8.13.11 ist also $(\text{ext}(A), \text{Kon}(Y))$ A -brauchbar. Da X in Y konvex ist, folgt aus 2.4.2, daß $\text{Kon}(X) \subseteq \text{Kon}(Y)$ gilt, nach 8.13.3 ist also $(\text{ext}(A), \text{Kon}(X))$ A -brauchbar. Für drei Punkte x, y und z in X gilt $m(x, y) + m(y, z) = m(x, z)$ genau dann, wenn y auf der Verbindungsstrecke von x und z liegt (siehe etwa W.Rinow [30, S.7]); das bedeutet, daß f $(\mathbb{R}_X^m, \mathbb{R}_X^{\mathbb{R}})$ -treu in X und $f^{-1}(\mathbb{R}_X^{\mathbb{R}}, \mathbb{R}_X^m)$ -treu in X ist. Nach 6.3.2 ist nun $(\text{mex}(A), \text{Mko}(X))$ A -brauchbar und wegen 8.13.11 ist $\text{mex}(A)$ dann $\text{Mko}(X)$ -Rand von A .

Rest der Aussage folgt wieder aus 8.10.2.

9.5 Bemerkung: Während 9.2 und 9.4 Sätze über metrische Strukturen sind, behandelt 9.1 eine Vektorraumstruktur. Beachtet man allerdings 1.8.2, so kann man 9.1 sofort zu einem metrischen Satz (betreffend die übliche euklidische Metrik) umschreiben. Man braucht nur konvex durch metrisch-konvex und extremal durch metrisch-extremal zu ersetzen.

§ 10 Attraktive Hülle und damit verwandte Hüllenbegriffe

Die Sätze 9.1, 9.2 und 9.4 des letzten Paragraphen geben Fälle an, wo die N-attraktive Hülle einer kompakten Menge schon durch ihre M-attraktiven Punkte aufgespannt wird. Sätze dieser Art lassen sich auch für andere der in § 1 und 3 behandelten Beispiele angeben. Dabei tritt allerdings nicht immer die N-attraktive Hülle auf, sondern auch damit in topologischem Sinne eng verwandte Hüllenbegriffe. Bevor wir diese einführen, noch eine 4.1 ergänzende

10.1 Vereinbarung: Ist X ein topologischer Raum und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, so bezeichnet $\mathcal{A}_k$ das System all der Mengen aus $\mathcal{A}$, die kompakt sind.

Jetzt zu der weitere Hüllenbegriffe erklärenden, angekündigten

10.2 Definition: Sei X ein topologischer Raum, (L, M, N) ein Zerlegungstrippel und R eine L -Relation in X . Für jedes $A \subset X$ definiert man dann als die offen-N-attraktive Hülle, bzw. abgeschlossen-N-attraktive Hülle, bzw. abgeschlossen-kompakt-N-attraktive Hülle von A die $\text{Att}(N, X)_0^-$, bzw. $\text{Att}(N, X)_a^-$, bzw. $\text{Att}(N, X)_{ak}$ -Hülle von A ; das ist also der Schnitt aller in X offenen und N-attraktiven, bzw. abgeschlossenen und N-attraktiven, bzw. abgeschlossenen, kompakten und N-attraktiven Mengen, die A enthalten.

10.3 Bemerkung: Nach 2.4.3 und 2.4.6 ist jede dieser Hüllen N-attraktiv. Während aber die abgeschlossen-N-attraktive Hülle stets abgeschlossen ist, braucht die offen-N-attraktive Hülle nicht offen zu sein. Die abgeschlossen-kompakt-N-attraktive Hülle muß, wenn sie nicht kompakt ist, $= X$ sein.

Nun kommen wir zu dem für diesen Paragraphen zentralen

10.4 Theorem: Sei X ein topologischer Raum, (L, M, N) ein Zerlegungstrippel mit endlichem N und R eine L -Relation in X , so daß X M-attraktiv-invertierend ist. Für jedes kompakte $A \subset X$ gilt dann:

(1) $(\text{Att}(M, A)_{aAm}, \text{Att}(N, X)_O)$ ist A-brauchbar, d.h. wenn ein $B \subset A$ jede in A minimal-M-attraktive Menge trifft, so hat es dieselbe offen-N-attraktive Hülle wie A.

(2) Ist A außerdem eine T_0 -Menge und X N-attraktiv-trennbar, so ist $\text{att}(M, A)_a$ ein $\text{Att}(N, X)_O$ -Rand von A, d.h. die Menge der in A M-attraktiven und abgeschlossenen Punkte hat dieselbe offen-N-attraktive Hülle wie A.

Beweis:

.....

(1) Nach 2.4.7 und 8.13.2 ist $(\text{Rep}(N, X)_{aA}, \text{Att}(N, X)_O)$ A-brauchbar, wegen 8.13.6 ist daher auch $(\text{Rep}(N, X)_{aA}, \text{Att}(N, X)_O)$ A-brauchbar. Mit 8.13.7 und 4.3.2 folgt nun, daß $(\text{Rep}(N, X)_{aAm}, \text{Att}(N, X)_O)$ und mit 8.13.8, daß auch $(A \cap \text{Rep}(N, X)_{aAm}, \text{Att}(N, X)_O)$ A-brauchbar ist. Da X M-attraktiv-invertierend ist, gilt $\text{Att}(M, A)_{aA} \supset A \cap \text{Rep}(N, X)_{aAm}$, nach 8.13.5 ergibt sich also, daß $(\text{Att}(M, A)_{aA}, \text{Att}(N, X)_O)$ A-brauchbar ist. Mit 8.13.7 und 4.4.1 folgt hieraus die Behauptung.

(2) Nach 4.6.1 und 4.6.6 ist A M-attraktiv-reduzierend, die Mengen des Systems $\text{Att}(M, A)_{aAm}$ sind also alle einpunktig. Mit 8.13.11 folgt die Behauptung dann aus (1).

Mit diesem Theorem wenden wir uns nun den Beispielen zu:

10.5 Wachsende Hüllen minimaler und fallender Punkte

X sei ein topologischer Raum mit einer zweistelligen Relation $\sqsubset$. Mit 5.1.3 ergibt sich dann aus 10.4.1 folgendes

10.5.1 Korollar: Für jedes kompakte $A \subset X$ ist $(\text{Fal}(A)_{aAm}, \text{Wac}(X)_O)$ A-brauchbar, d.h. wenn ein $B \subset A$ jede in A minimal-fallende Menge trifft, so hat es dieselbe offen-wachsende Hülle wie A.

Hiermit folgt aus 5.1.1 der

10.5.2 Satz: Ist X fallend-abgeschlossen, $\sqsubset$ transitiv und $A \subset X$ kompakt, dann hat $\min(A)$ dieselbe offen-wachsende Hülle wie A.

Aus 10.4.2 ergibt sich mit 5.1.3, 5.1.5 und 1.1.2 das

10.5.3 Korollar: Ist X wachsend-trennbar und A kompakte T_0 -Teilmenge von X , so ist $\min(A) = \text{fal}(A)$ ein $\text{Wac}(X)_0$ -Rand von A .

Aus 10.5.3 und 5.1.4 (oder aus 10.5.2 und 1.1.2) folgt nun eine Verschärfung von 10.5.2 unter etwas stärkeren Voraussetzungen:

10.5.4 Satz: Ist X fallend-abgeschlossen, $\subseteq$ antisymmetrisch und transitiv und $A \subset X$ kompakt, dann ist $\min(A) = \text{fal}(A)$ ein $\text{Wac}(X)_0$ -Rand von A .

Es lassen sich jedoch nicht nur Aussagen über offen-wachsende Hüllen, sondern auch solche über wachsende Hüllen machen. Hierzu benötigen wir

10.5.5 Lemma: Ist X fallend-abgeschlossen und $\subseteq$ transitiv, dann ist $\text{Wac}(X)_0$ stärker als $\text{Wac}(X)$, also $\text{Wac}(X)_0 \supset \text{Wac}(X)$.

Ist nämlich $B \in \text{Wac}(X)$ und $a \notin B$, dann liegt $X \setminus]a, \infty[_X =: A$ in $\text{Wac}(X)_0$ und es gilt $a \notin A \supset B$. Mit 10.5.5 und 8.13.4 folgt nun aus 10.5.1:

10.5.6 Satz: Ist X fallend-abgeschlossen und $\subseteq$ transitiv, dann ist für jedes kompakte $A \subset X$ das Paar $(\text{fal}(A)_{\text{aAm}}, \text{Wac}(X))$ A-brauchbar, d.h. wenn ein $B \subset A$ jede in A minimal-fallende Menge trifft, so hat es dieselbe wachsende Hülle wie A .

Aus 10.5.2 ergibt sich mit 8.14 und 10.5.5 als

10.5.7 Korollar: Ist X fallend-abgeschlossen und $\subseteq$ transitiv, dann ist für jedes kompakte $A \subset X$ die Menge $\min(A)$ ein $\text{Wac}(X)$ -Rand von A .

Aus 10.5.4 folgt nun schließlich mit 8.14, 10.5.5 und 8.10.2 ein Satz, der hier etwa dem entspricht, was im $\mathbb{R}^n$ der Satz von Minkowski ist:

10.5.8 Satz: Ist X fallend-abgeschlossen, $\subseteq$ transitiv und antisymmetrisch und $A \subset X$ kompakt, dann ist $B := \min(A) = \text{fal}(A)$ ein $\text{Wac}(X)$ -Rand von A ; wenn A wachsend ist, ist B sogar kleinster $\text{Wac}(X)$ -Rand von A .

Als nächstes nun ein Satz über Strömungen:

10.6 Satz: (X, T) sei eine Strömung in einem kompakten Raum X mit nicht leerer Transformationshalbgruppe T , so daß jeder Punkt aus X eine abgeschlossene Bahn hat. Die Bahn jedes Punktes aus X führt dann durch einen

periodischen Punkt.

Beweis: Da T eine Halbgruppe ist, ist $\sqsubset$ aus 1.3.1 transitiv. Daß $A_{\text{Wac}}(X) = X$ für ein $A \subset X$ gilt, bedeutet daher gerade, daß es zu jedem $x \in X$ ein $a \in A$ mit $a \sqsubset x$ gibt, daß also die Bahn jedes Punktes aus X durch einen Punkt aus A führt. Nach 10.5.7 gilt $X = \min(X)_{\text{Wac}}(X)$ und wegen 1.3.3 und 8.2 ist dann $X = B_{\text{Wac}}(X)$ für die Menge aller periodischen Punkte B . Daraus folgt die Behauptung.

10.7 Verallgemeinerungen des Satzes von Krein-Milman

Aus 10.4 ergibt sich mit Hilfe von 5.3.1 unmittelbar:

10.7.1 Satz: Ist X ein Vektorraum über einem archimedisch geordneten Körper K und mit einer translationsinvarianten Topologie versehen, dann gilt für jedes kompakte $A \subset X$:

(1) $(\text{Ext}(A)_{\text{aAm}}, \text{Kon}(X)_0)$ ist A -brauchbar, d.h. wenn ein $B \subset A$ jede in A minimal-extremale Menge trifft, so hat sie dieselbe offen-konvexe Hülle wie A .

(2) Ist X außerdem konvex-trennbar und A eine T_0 -Menge, so hat $\text{ext}(A)_a$ dieselbe offen-konvexe Hülle wie A .

Um ähnliche Sätze auch für andere Hüllen zu erhalten, zeigen wir ein

10.7.2 Lemma: Ist ein Vektorraum X über einem geordneten Körper K mit einer translations- und spiegelungsinvarianten Topologie versehen, so gilt:

(1) Ist X lokal-konvex, so gilt $\text{Kon}(X)_0 \supsetneq \text{Kon}(X)_a$.

(2) Ist X konvex-trennbar, so gilt $\text{Kon}(X)_0 \supsetneq \text{Kon}(X)_{\text{ak}}$.

Beweis: Sei $B \in \text{Kon}(X)_a$, bzw. $B \in \text{Kon}(X)_{\text{ak}}$. Sei $x \notin B$. Nach 8.12 ist dann ein $A \in \text{Kon}(X)_0$ mit $x \notin A \supset B$ zu finden. Es genügt zu zeigen:

(+) Es gibt eine offene, konvexe Nullumgebung V mit $(x+V) \cap B = \emptyset$.

Wegen $x \notin B-V$ hat dann nämlich $A := B-V$ die gewünschte Eigenschaft. Bleibt daher (+) zu zeigen. Im Falle (1), wo ja $B \in \text{Kon}(X)_a$ ist, ist (+) trivial. Nun

also zu Fall (2), wo $B \in \text{Kon}(X)_{\text{ak}}$ ist. Für jedes $y \in B$ gibt es eine offene, konvexe Menge, die x und y trennt. Es gibt also (möglicherweise ist eine Spiegelung am Punkt $\frac{x+y}{2}$ durchzuführen) eine offene, konvexe Nullumgebung U_y mit $y \notin x+U_y$. O.B.d.A können wir $\frac{y-x}{2} \notin U_y$ annehmen (eventuell muß U_y dazu um $\frac{y-x}{2}$ verschoben werden). Nun definieren wir $C_y := y - U_y$ und $D_y := x + U_y$. Es gilt $C_y \cap D_y = \emptyset$, denn aus $z \in C_y \cap D_y$ folgte: Es gibt $a, b \in U_y$ mit $z = y - a = x + b$, also $y - x = a + b \in U_y + U_y = 2U_y$ und daher $\frac{y-x}{2} \in U_y$; dies wäre ein Widerspruch. Da B kompakt ist, gibt es eine endliche Menge $E \subset B$ mit $\bigcup_{y \in E} C_y \supset B$. Für die offene, konvexe Nullumgebung $V := \bigcap_{y \in E} U_y$ ist (+) erfüllt.

Mit diesem Lemma, 8.13.4 und 8.14 folgt nun aus 10.7.1:

10.7.3 Satz: Ist ein Vektorraum X über einem archimedisch geordneten Körper mit einer translations- und spiegelungsinvarianten Topologie versehen, die konvex-trennbar, bzw. sogar lokal-konvex ist, dann gilt für jedes kompakte $A \subset X$:

- (1) $(\text{Ext}(A)_{\text{aAm}}, \text{Kon}(X)_{\text{ak}})$, bzw. $(\text{Ext}(A)_{\text{aAm}}, \text{Kon}(X)_a)$ ist A -brauchbar.
- (2) Ist A eine T_0 -Menge, so hat $\text{ext}(A)_a$ dieselbe abgeschlossen-kompakt-konvexe, bzw. abgeschlossen-konvexe Hülle wie A .

Wenn eine Menge C enthalten ist in einer Menge, die zugleich konvex, abgeschlossen und kompakt ist, dann stimmen für dieses C die abgeschlossen-kompakt-konvexe Hülle und die abgeschlossen-konvexe Hülle überein. Mit dieser Bemerkung ergibt sich nun aus 10.7.3.2 derjenige der hier bewiesenen Sätze, der als direkteste Verallgemeinerung angesehen werden kann vom

10.7.4 Satz von Krein-Milman: Ist A eine abgeschlossene, kompakte, konvexe T_0 -Teilmenge eines mit einer konvex-trennbaren, translations- und spiegelungsinvarianten Topologie versehenen Vektorraums über einem archimedisch geordneten Körper, dann ist die abgeschlossen-konvexe Hülle von $\text{ext}(A)$ gerade wieder A .

Was nun Beispiele zu diesen Sätzen angeht, insbesondere zum letzten, die bisher noch nicht bekannt waren, so verweisen wir hier nur auf 5.3.7. Die dortigen Beispiele behandeln alle solche Vektorräume mit Topologie, daß die Voraussetzungen, die hier in 10.7.1, 10.7.2, 10.7.3 und 10.7.4 gemacht werden, erfüllt sind.

10.8 Intervallartige Hüllen minimaler und maximaler Punkte

X sei ein topologischer Raum mit einer transitiven, antisymmetrischen zweistelligen Relation $\sqsubseteq$, bezüglich deren X fallend-abgeschlossen und wachsend-abgeschlossen ist. Wenn wir die Bezeichnungen aus 1.9 und 3.3 übernehmen, so gilt folgendes

10.8.1 Lemma: X ist M -attraktiv-invertierend.

Beweis: Für jedes $A \subset X$ ist $A \cap \text{Rep}(N, X)_{aAm} \subset \text{Att}(M, A)$ zu zeigen. Wenn $B \in \text{Rep}(N, X)_{aAm}$ ist, so liegt $C := X \setminus B$ in $\text{Att}(N, X)_0 = \text{Int}(X)_0$. Für ein $b \in B$ gelte $a \sqsubseteq b \sqsubseteq c$ und $a \not\sqsubseteq b \not\sqsubseteq c$ mit $a, c \in A$. Bleibt nachzuweisen, daß weder a noch c in C liegt:

Nehmen wir $a \in C$ an. Da C intervallartig ist, gilt dann $c \in B$. Für $D := [c, \rightarrow]_X$ gilt dann $C \cap D = \emptyset$, denn wegen der Transitivität von $\sqsubseteq$ folgte aus $d \in C \cap D$, daß $a \sqsubseteq c \sqsubseteq d$ gälte, da C intervallartig ist, wäre dann aber $c \in C$ im Widerspruch zu $c \in B$. Nach 1.9.3 liegt die Menge $X \setminus D \in \text{Fal}(X)_0$ in $\text{Int}(X)_0 = \text{Att}(N, X)_0$. Für $D \in \text{Rep}(N, X)_{aA}$ gilt also $D \subset B$. Nun gilt aber noch $b \notin D$, sonst wäre $c \sqsubseteq b$, womit aus $b \sqsubseteq c$ und der Antisymmetrie von $\sqsubseteq$ der Widerspruch $b = c$ folgte. D ist also eine echte Teilmenge von B und das widerspricht dessen Minimalität. Es kann also weder a noch - wie man ganz analog zeigt - c in C liegen.

Wegen 1.9.3 und 5.1.4 ist X ein intervallartig-trennbarer, also N -attraktiv-trennbarer T_0 -Raum und mit Hilfe von 10.8.1 und 1.9.4 folgt daher aus 10.4.2:

10.8.2 Satz: Ist X ein topologischer Raum mit einer transitiven, antisymmetrischen zweistelligen Relation $\sqsubseteq$, bezüglich deren X fallend-abgeschlossen und wachsend-abgeschlossen ist, und ist A eine kompakte Teil-

menge von X , dann ist $\min(A) \cup \max(A) = \text{fal}(A) \cup \text{wac}(A)$ ein $\text{Int}(X)_0$ -Rand von A .

Um diesen Satz nun statt mit der offen-intervallartigen Hülle auch mit der intervallartigen Hülle beweisen zu können, zeigen wir

10.8.3 Lemma: Es gilt $\text{Int}(X)_0 \supset \text{Int}(X)$.

Beweis: Ist $B \in \text{Int}(X)$ und $x \notin B$, so ist nach 8.12. ein $A \in \text{Int}(X)_0$ mit $x \in A \supset B$ zu finden. Es sind $A_1 := X \setminus [x, \rightarrow]_X$ und $A_2 := X \setminus]\leftarrow, x]_X$ zwei Mengen, die nach 1.9.3 in $\text{Int}(X)_0$ liegen; es gilt $x \notin A_1$ und $x \notin A_2$. Wenn $A_1 \not\supset B$ und $A_2 \not\supset B$ gälte, so würde das $[x, \rightarrow]_X \cap B \neq \emptyset$ und $] \leftarrow, x]_X \cap B \neq \emptyset$ bedeuten, es gäbe also $a, b \in B$ mit $a \leq x \leq b$, woraus wegen der Intervallartigkeit von B der Widerspruch $x \in B$ folgt. Mindestens eine der Mengen A_1 und A_2 erfüllt daher die an A gestellten Forderungen.

Aus 10.8.2, 10.8.3, 8.14 und 8.10.2 folgt nun ein Ergebnis, das in dieser Situation etwa das aussagt, was der Satz von Minkowski im $\mathbb{R}^n$ sagt:

10.8.4 Satz: Ist X ein topologischer Raum mit einer transitiven, antisymmetrischen zweistelligen Relation $\sqsubseteq$, bezüglich deren X fallend-abgeschlossen und wachsend-abgeschlossen ist, und ist A eine kompakte Teilmenge von X , dann ist $\min(A) \cup \max(A) = \text{fal}(A) \cup \text{wac}(A)$ ein $\text{Int}(X)$ -Rand von A ; wenn A intervallartig ist, ist dies sogar der kleinste $\text{Int}(X)$ -Rand der Menge A .

Zum Abschluß dieses Paragraphen nun noch eine

10.9 Bemerkung: Wenn man in $\mathbb{N}^*$ eine Topologie dadurch erklärt, daß $\mathbb{N}^*$ und alle endlichen Teilmengen gerade die abgeschlossenen Teilmengen sind, und wenn man die Bezeichnungen von 1.11 und 3.3 zugrunde legt, so läßt sich zeigen, daß die Voraussetzungen von 10.4.2 für $A = X$ erfüllt sind und man erhält gemeinsam mit 8.10.2 den bekannten zahlentheoretischen Satz, daß jede natürliche Zahl $\neq 0$ sich als Produkt von Primzahlen (die 1 eingeschlossen) darstellen läßt und daß man zu dieser Darstellung auch alle Primzahlen benötigt.

§ 11 Durch Abbildungen erzeugte Hüllen und Ränder

Nun sollen Ränder und Hüllen betrachtet werden, die durch eine Menge von Abbildungen erzeugt worden sind. Zuerst allerdings eine 4.1 ergänzende

11.1 Bezeichnung: Ist X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, so setzt man $\mathcal{A}_S := \{\cap B : B \subset \mathcal{A}\}$.

Nun zwei Voraussetzungen:

(11.A) Sei X eine Menge, A eine mit einer kompakten Topologie versehene Teilmenge von X und F eine Menge von Abbildungen, so daß jedes $f \in F$ die Menge X in einen topologischen Raum Y_f abbildet und in A stetig ist.

(11.B) Für jedes $f \in F$ sei ein Zerlegungstriplet (L_f, M_f, N_f) und eine L_f -Relation R_f in Y_f gegeben.

Man erklärt nun:

11.2 Definition: Unter den Voraussetzungen 11.A und 11.B heißt $\text{Sei}_F(A) := \{A \cap f^{-1}(a) : f \in F \text{ und } a \in \text{att}(R_f, M_f, f(A))_a\}$ das System der F-Seiten von A und $\text{Eck}_F(A) := \text{Sei}_F(A)_{\text{sAm}}$ das System der F-Ecken von A.

Als weitere Voraussetzung wird eingeführt:

(11.C) Zu jedem $f \in F$ sei ein $\mathcal{A}_f \subset \mathcal{P}(Y_f)$ gegeben, so daß $\text{att}(R_f, M_f, f(A))_a$ ein $\mathcal{A}_f$ -Rand von $f(A)$ ist.

Nun erklärt man:

11.3 Bezeichnung: Unter den Voraussetzungen 11.A und 11.C setzt man $\mathcal{A}_F := \bigcup_{f \in F} f^{-1}(\mathcal{A}_f)$.

Man erhält als ersten

11.4 Satz: Wenn 11.A, 11.B und 11.C gelten, dann ist $(\text{Sei}_F(A), \mathcal{A}_F)$ A-brauchbar.

Beweis: Nach 8.13.11 ist $(\text{att}(R_f, M_f, f(A))_a, \mathcal{A}_f)$ für jedes $f \in F$ $f(A)$ -brauchbar.

Mit 8.13.9 und 8.13.8 folgt daraus, daß $(\{A \cap f^{-1}(a) : a \in \text{Att}(R_f, M_f, f(A))_a\}, f^{-1}(\mathcal{A}_f))$ für jedes $f \in F$ A-brauchbar ist, und 8.13.10 ergibt dann die Behauptung.

Aus 11.4 folgt mit 8.13.5, daß $(\text{Sei}_F(A)_{sA}, \mathcal{A}_F)$ A-brauchbar ist. $\text{Sei}_F(A)_{sA}$ ist wegen der Kompaktheit von $A \cap$ -induktiv, mit 8.13.7 folgt also:

11.5 Satz: Wenn 11.A, 11.B und 11.C gelten, dann ist $(\text{Eck}_F(A), \mathcal{A}_F)$ A-brauchbar.

Die bisherigen Voraussetzungen werden nun durch eine weitere ergänzt:

(11.D) (L_X, M_X, N_X) sei ein Zerlegungstriple, R_X eine L_X -Relation in X und jedes $f \in F$ sei (R_X, M_X, R_f, M_f) -brav in A.

Es gilt nun:

11.6 Satz: Wenn 11.A, 11.B, 11.C und 11.D gelten, dann ist das Paar $(\text{Att}(R_X, M_X, A)_{aAm}, \mathcal{A}_F)$ A-brauchbar, d.h. wenn ein $B \subset A$ jede in A minimal-M-attraktive Menge trifft, so ist sie ein $\mathcal{A}_F$ -Rand von A.

Beweis: Nach 11.4 ist $(\text{Sei}_F(A), \mathcal{A}_F)$ A-brauchbar. Nach 6.6.1 ist $\text{Sei}_F(A) \subset \text{Att}(R_X, M_X, A)_{aA}$, wegen 8.13.5 ist also auch $(\text{Att}(R_X, M_X, A)_{aA}, \mathcal{A}_F)$ A-brauchbar und mit 4.4.1 und 8.13.7 folgt daraus die Behauptung.

Mit Definition 4.5.3 und 8.13.11 folgt aus 11.6 unmittelbar:

11.7 Satz: Wenn 11.A, 11.B, 11.C und 11.D gelten und A eine (bezüglich R_X) M-attraktiv-reduzierende T_0 -Menge ist, so ist $\text{att}(R_X, M_X, A)_a$ ein $\mathcal{A}_F$ -Rand von A.

Nun noch eine letzte Voraussetzung:

(11.E) F trennt die Punkte von A und für jedes $f \in F$ ist Y_f ein (bezüglich R_f) M_f -attraktiv-reduzierender T_0 -Raum.

Mit 6.8.1 folgt nun aus 11.7:

11.8 Satz: Wenn 11.A, 11.B, 11.C, 11.D und 11.E gelten, dann ist $\text{att}(R_X, M_X, A)_a$ ein $\mathcal{A}_F$ -Rand von A.

Wir betrachten nun ganz spezielle Mengensysteme $\mathcal{A}_F$, die in den Beispielen in § 12 eine bedeutende Rolle spielen werden:

11.9 F-Ränder: Unter den Voraussetzungen 11.A und 11.B wird gesetzt: $\mathcal{A}_F := \{f(A) \setminus \{a\} : a \in \text{att}(R_F, M_F, f(A))_a\}$. Wegen 8.13.2 und 8.13.11 ist dann 11.C erfüllt. $B \subset A$ heißt ein F-Rand von A, wenn es ein $\mathcal{A}_F$ -Rand von A ist. Man beachte, daß hier die $\mathcal{A}_F$ und ebenso $\mathcal{A}_F$ von A abhängen. Daß F-Ränder von großem Interesse sind, ergibt sich aus folgendem

11.9.1 Lemma: Unter den Voraussetzungen 11.A und 11.B sind für jedes $B \subset A$ folgende beiden Aussagen gleichwertig:

(1) B ist ein F-Rand von A.

(2) Für jedes $f \in F$ und jedes $b \in \text{att}(R_F, M_F, f(A))_a$ gibt es ein $a \in B$, so daß $f(a) = b$ gilt.

Beweis: Unter Berücksichtigung von 8.4 gilt: (1) $\iff$ Für jedes $C \in \mathcal{A}_F$ mit $C \not\supset A$ gilt $C \not\supset B$. $\iff$ Für jedes $f \in F$ und jedes $b \in \text{att}(R_F, M_F, f(A))_a$ mit $f^{-1}(f(A) \setminus \{b\}) \not\supset A$ gilt $f^{-1}(f(A) \setminus \{b\}) \not\supset B$. $\iff$ Für jedes $f \in F$ und jedes $b \in \text{att}(R_F, M_F, f(A))_a$ gilt $f^{-1}(f(A) \setminus \{b\}) \not\supset B$. $\iff$ (2).

Für den Fall, daß die Bildräume Y_f alle totalgeordnet sind und daß von den Funktionen f in den entsprechenden Sätzen Zulässigkeit statt allgemein Bravheit gefordert wird, gewinnen die Sätze, Bezeichnungen und Definitionen teilweise ein ziemlich anderes Aussehen. Wir werden daher den ganzen Paragraphen für diesen Spezialfall noch einmal aufschreiben. Den Beweis für die gesamte Umschreibung bringen wir anschließend.

Zuerst eine Voraussetzung:

(11.F) X sei eine Menge, A eine mit einer kompakten Topologie versehene, nicht leere Teilmenge von X und F eine Menge von Abbildungen, so daß jedes $f \in F$ die

Menge X in einen totalgeordneten Raum Y_f abbildet und in A nach unten halbstetig ist.

Nun wir erklärt:

11.10 Definition: Unter der Voraussetzung 11.F heißt $\text{Sei}_F(A) := \{A \cap f^{-1}(\inf(f(A))) : f \in F\}$ das System der F-Seiten von A und $\text{Eck}_F(A) := \text{Sei}_F(A)_{\text{aAm}}$ das System der F-Ecken von A.

Als weitere Voraussetzung wir eingeführt:

(11.G) Zu jedem $f \in F$ sei ein $\mathcal{A}_f \subset \mathcal{P}(Y_f)$ mit $f(A) \cap \mathcal{A}_f \subset \text{War}(f(A))$ gegeben.

Man erklärt dann:

11.11 Bezeichnung: Unter den Voraussetzungen 11.F und 11.G setzt man $\mathcal{A}_F := \bigcup_{f \in F} f^{-1}(\mathcal{A}_f)$.

Es gilt:

11.12 Satz: Wenn 11.F und 11.G gelten, dann ist $(\text{Sei}_F(A), \mathcal{A}_F)$ A-brauchbar.

und:

11.13 Satz: Wenn 11.F und 11.G gelten, dann ist $(\text{Eck}_F(A), \mathcal{A}_F)$ A-brauchbar.

Als nächstes wird vorausgesetzt:

(11.H) (L, M, N) sei ein Zerlegungstripel, R eine L -Relation in X und jedes $f \in F$ sei (R, M) -zulässig in A .

Nun gilt:

11.14 Satz: Wenn 11.F, 11.G und 11.H gelten, dann ist $(\text{Att}(R, M, A)_{\text{aAm}}, \mathcal{A}_F)$ A-brauchbar.

und:

11.15 Satz: Wenn 11.F, 11.G und 11.H gelten und A eine M -attraktivereduzierende T_0 -Menge ist, so ist $\text{att}(R, M, A)_a$ ein $\mathcal{A}_F$ -Rand von A .

Schließlich setzt man noch voraus:

(11.I) F trennt die Punkte von A .

Damit gilt dann:

11.16 Satz: Wenn 11.F, 11.G, 11.H und 11.I gelten, dann ist $\text{att}(R, M, A)_a$ ein $\mathcal{A}_F$ -Rand von A.

Nun betrachten wir ganz spezielle $\mathcal{A}_F$:

11.17 F-Ränder: Unter der Voraussetzung 11.F wird $\mathcal{A}_F := f(A) \setminus \{\inf(f(A))\}$ gesetzt. 11.G ist dann erfüllt. $B \subset A$ heißt ein F-Rand von A, wenn es ein $\mathcal{A}_F$ -Rand von A ist. Man beachte, daß $\mathcal{A}_F$ und $\mathcal{A}_F$ von A abhängen. Daß F-Ränder von großem Interesse sind, ergibt sich aus folgendem

11.17.1 Lemma: Unter der Voraussetzung 11.F sind für jedes $B \subset A$ folgende beiden Aussagen gleichwertig:

(1) B ist ein F-Rand von A.

(2) Zu jedem $f \in F$ gibt es ein $a \in B$ mit $f(a) = \inf(f(A))$.

Dieses Lemma zeigt insbesondere, daß der aus der Theorie der Funktionenalgebren stammende Randbegriff (siehe z.B. M.Grossman [17, S.6, 3.1]) auch Rand im Sinne von Definition 8.3 ist.

Beweis: Nach 6.1.2 entsprechen sich 11.F und 11.A. Für jedes $f \in F$ sei

$(L_f, M_f, N_f) := (\{1, 2\}, \{1\}, \{2\})$ und $R_f := R_{Y_f}^{\leq}$. Mit 11.A ist daher auch schon

11.B erfüllt. Da jede der kompakten, nicht leeren Mengen $f(A)$ nach 6.1.2 einen kleinsten Punkt besitzt, entsprechen sich 11.10 und 11.2 wegen 3.2.2 direkt.

Da Y_f totalgeordnet und mit der Topologie $t_+(Y_f)$ versehen ist, gilt für jedes $\mathcal{A}_f \subset \mathcal{P}(Y_f)$: $\text{att}(R_f, M_f, f(A))_a$ $\mathcal{A}_f$ -Rand von A $\iff \{\inf(f(A))\} = \{\inf(f(A))\}_a$
 $\mathcal{A}_f$ -Rand von A $\iff$ Für jedes $C \in \mathcal{A}_f$ mit $\inf(f(A)) \in C$ gilt $C \supset f(A) \iff$
 $f(A) \cap \mathcal{A}_f \subset \text{Wab}(f(A))$. Unter der Voraussetzung 11.F folgt also 11.C aus 11.G.

11.11 stimmt mit 11.3 überein, 11.12 entspricht 11.4 und Satz

11.13 dem Satz 11.5. Nach 6.7.2 ist 11.H ein Spezialfall von 11.D und aus 11.6, bzw. 11.7 werden gerade 11.14, bzw. 11.15; Da die Y_f nach 5.1.6 fallend-reduzierend sind, entsprechen sich 11.E und 11.I und deshalb auch die Sätze 11.8 und 11.16. Da, wie oben bemerkt wurde, $\text{att}(R_f, M_f, f(A))_a = \{\inf(f(A))\}$ ist,

geht 11.9 über in 11.17, insbesondere 11.9.1 in 11.17.1.

Neben den $\mathcal{A}_F$ aus 11.17 sind in dieser Situation auch noch andere von Bedeutung:

11.18 F-Hüllen: Es gelte 11.F. Wir setzen $\mathcal{A}_F := \{[x, \rightarrow_{Y_F} : x \in Y_F]\}$ für jedes $f \in F$. Wegen 2.4.1 gilt dann 11.G. Ist $B \subset A$, so heißt die $\mathcal{A}_F$ -Hülle von B auch F-Hülle von B . Man beachte, daß die Begriffe F-Rand und F-Hülle auf verschiedene Systeme $\mathcal{A}_F$ zurückgehen. F-Hüllen lassen sich leicht explizit angeben:

11.18.1 Lemma: Unter der Voraussetzung 11.F gilt für jedes $B \subset A$:

$$(1) \text{ F-Hülle von } B = \bigcap_{f \in F, k \in G_f} \{x \in X : f(x) \geq k\}, \text{ wobei } G_f := \{k \in Y_f : k \leq f(b) \text{ für alle } b \in B\}.$$

Ist außerdem entweder B nicht leer und kompakt oder hat in Y_f jede nach unten beschränkte Menge ein Infimum, so gilt:

$$(2) \text{ F-Hülle von } B = \bigcap_{f \in F} \{x \in X : f(x) \geq \inf(f(B))\}.$$

In der Funktionentheorie wichtige F-Hüllen sind z.B. die polynom-konvexe Hülle und die holomorph-konvexe Hülle (siehe z.B. R.Gunning und H.Rossi [18, S.39, bzw. 47]).

§ 12 Beispiele zu § 11

12.1 Isotone Funktionen

Aus der großen Fülle von Sätzen über isotone Funktionen, die sich aus den Ergebnissen des § 11 herleiten lassen, sollen hier nur zwei herausgegriffen werden. Beginnen wir mit folgendem

12.1.1 Satz: Sei X ein mit einer transitiven zweistelligen Relation versehener, fallend-abgeschlossener kompakter Raum und f eine stetige, isotone Abbildung von X in einen mit einer zweistelligen Relation versehenen, topologischen Raum Y . Zu jedem $a \in \text{fal}(f(X))_a$ gibt es dann ein $b \in \text{min}(X)$ mit $a = f(b)$.

Beweis: Es wird 11.6 angewandt. Die Voraussetzung 11.A ist mit $F := \{f\}$ offenbar erfüllt; desgleichen bei Zugrundelegung der Bezeichnungen aus 3.2 wegen 6.7.1 und 7.1.1 auch 11.B und 11.D. Um 11.C zu erfüllen, wählen wir das $\mathcal{A}_f$ aus 11.9. Nach 11.6 ist nun $(\text{Fal}(X)_{aXm}, \mathcal{A}_f)$ A-brauchbar und mit 5.1.1 und 11.9.1 folgt daraus die Behauptung.

Während bei diesem Satz im Urbild eine Verträglichkeitsbedingung zwischen der zweistelligen Relation und der Topologie vorausgesetzt war, wird das im nun folgenden Satz für das Bild der Fall sein; zudem muß aber noch vorausgesetzt werden, daß es genügend viele isotone Funktionen gibt:

12.1.2 Satz: Sei X ein mit einer zweistelligen Relation versehener, kompakter Raum, dessen Punkte durch die Menge F aller stetigen, isotonen Abbildungen in fallend-abgeschlossene geordnete Räume getrennt werden. Dann gibt es für jedes $f \in F$ und jedes $a \in \text{min}(f(X)) = \text{fal}(f(X))$ ein $b \in \text{fal}(X)_a$ mit $a = f(b)$.

Beweis: Es wird 11.8 angewandt. 11.A, 11.B und 11.D sind wie im Beweis zu 12.1.1 auch hier klar. Um 11.C zu erfüllen, wählt man wieder die $\mathcal{A}_f$ aus 11.9.

Die Voraussetzung 11.E schließlich ist wegen 5.1.4 und 5.1.6 erfüllt. Ist $f \in \mathcal{F}$ und Y_f der zugehörige Bildraum, $B \subset Y_f$ und $c \in \text{fal}(B)$, dann ist $B \cap \leftarrow, c \right]_{Y_f}$ $\{c\}$ und da Y_f fallend-abgeschlossen ist, ist diese Menge abgeschlossen in B , d.h. $\text{fal}(B) = \text{fal}(B)_a$. Aus 11.8 und 11.9.1 folgt daher die Behauptung.

12.2 Lokal-konvexe topologische $\mathbb{R}$ -Vektorräume

X sei ein lokal-konvexer topologischer $\mathbb{R}$ -Vektorraum und A eine kompakte, nicht leere Teilmenge von X . $F := X'$. Da der gemeinsame Bildraum $\mathbb{R}$ totalgeordnet ist, ist 11.F erfüllt. Nach 11.10 sind die F -Seiten von A gerade die Schnitte von A mit seinen Stützhyperebenen und die F -Ecken von A sind seine minimalen Stützkanten (Definition siehe G.Köthe [24, S.339]). (Wenn speziell $X = \mathbb{R}^2$ ist und A ein konvexes Polygon, dann sind die F -Ecken von A gerade die einpunktigen Mengen, die aus einem geometrischen Eckpunkt von A bestehen, und die F -Seiten von A sind gerade die geometrischen Seiten und die F -Ecken von A .) Die F -Hülle einer Menge ist nach 11.18.1.1 gerade der Schnitt aller abgeschlossenen Halbräume, die diese Menge enthalten. Nach einem bekannten Korollar zum Satz von Hahn-Banach (siehe etwa N.Bourbaki [7, S.85, cor.1]) gilt daher:

12.2.1 Lemma: F -Hülle = abgeschlossen-konvexe Hülle.

Legen wir nun die $\mathcal{A}_F$ aus 11.18 zugrunde, so ist 11.G erfüllt. Mit 12.2.1 werden nun aus den Ergebnissen des § 11 Sätze aus der Theorie der lokal-konvexen topologischen $\mathbb{R}$ -Vektorräume: Aus 11.12 wird nun (vgl. N.Bourbaki [7, S.100 cor., $b \Rightarrow a$]):

12.2.2 Satz: Wenn ein $B \subset A$ jede F -Seite von A (also jede Stützhyperebene von A) trifft, so haben B und A dieselbe abgeschlossen-konvexe Hülle.

Aus 11.13 ergibt sich (vgl. G.Köthe [24, S.340, (2)]) der

12.2.3 Satz von Milman-Rutman: Wenn ein $B \subset A$ jede F -Ecke von A (also jede minimale Stützkante von A) trifft, so haben B und A dieselbe abgeschlossen-konvexe Hülle.

Machen wir nun noch von den Bezeichnungen in 1.5 und 3.3 Gebrauch, so sind die

Funktionen aus F als konvexe Funktionen nach 7.5.1 zulässig; 11.E ist daher erfüllt; und aus 11.14 wird (als Spezialfall von 10.7.3.1):

12.2.4 Satz: Wenn ein $B \subset A$ jede in A minimal-extremale Teilmenge trifft, dann haben B und A dieselbe abgeschlossen-konvexe Hülle.

Nach dem Satz von Hahn-Banach trennen die stetigen Linearformen die Punkte jeder $\mathbb{T}_2$ -Menge in X , aus 11.15 folgt also noch einmal wesentlich spezieller als 10.7.3.2 der

12.2.5 Satz von Krein-Milman: Ist A eine $\mathbb{T}_2$ -Menge, so haben A und $\text{ext}(A)$ dieselbe abgeschlossen-konvexe Hülle.

12.3 Urbilder von Extrempunkten bei affinen Abbildungen

In Verallgemeinerung eines bekannten Ergebnisses (vgl. z.B. G.Köthe [24, S. 336, (9)]) zeigen wir zuerst:

12.3.1 Satz: Ist ein Vektorraum X über einem archimedisch geordneten Körper K mit einer konvex-trennbaren, translationsinvarianten Topologie versehen, ist Y ein mit einer beliebigen Topologie versehener zweiter K -Vektorraum und f eine affine Abbildung von X in Y , dann gibt es zu jeder kompakten $\mathbb{T}_0$ -Teilmenge A von X , in der f stetig ist, und zu jedem $a \in \text{ext}(f(A))_a$ ein $b \in \text{ext}(A)_a$ mit $a = f(b)$.

Beweis: Es wird 11.7 angewandt. Die Voraussetzung 11.A ist mit $F := \{f\}$ offenbar erfüllt; desgleichen bei Ueberschiebung der Bezeichnungen aus 12.3 und 12.3 wegen 8.7.1 und 7.2.1 auch 11.B und 11.D. Um 11.C zu erfüllen, wählen wir das A_2 aus 11.8. Nach 9.3.2 und 4.6.1 ist A extremal-reduzierende $\mathbb{T}_0$ -Menge und daher liefert 11.7 nun mit 11.9.1 die Behauptung.

Auch hier kann man wie in 12.1 nun statt im Urbild im Bild eine Verträglichkeitsbedingung voraussetzen und kommt, wenn es nur genügend viele affine Funktionen gibt, zu einem ähnlichen Ergebnis:

12.3.2 Satz: X sei ein Vektorraum über einem archimedisch geordneten Körper K und A eine mit einer kompakten Topologie versehene Teilmenge von X , deren Punkte getrennt werden durch die Menge F der affinen, in A stetigen Abbildungen von X in K -Vektorräume mit konvex-trennbarer, translationsinvarianter T_0 -Topologie. Dann gibt es zu jedem $f \in F$ und zu jedem $a \in \text{ext}(f(A))_a$ ein $b \in \text{ext}(A)_a$ mit $a = f(b)$.

Beweis: 11.8 wird angewandt. Die Voraussetzungen 11.A, 11.B und 11.D sind wie
im Beweis zu 12.3.1 auch hier erfüllt. Um 11.C zu erfüllen, wählt man wieder die $\mathcal{A}_F$ aus 11.9. Die Voraussetzung 11.E schließlich ist wegen 5.3.2 erfüllt und mit 11.9.1 folgt nun die Behauptung aus 11.8.

12.4 Die ultrakonvexe Hülle

X sei ein mit einer Topologie versehener $\mathbb{R}$ -Vektorraum, A eine kompakte Teilmenge von X und F die Menge aller stetigen, linearen Abbildungen von X in endlich-dimensionale, hausdorffsche topologische $\mathbb{R}$ -Vektorräume. 11.A ist erfüllt und bei Zugrundelegung von 1.5 und 3.3 wegen 6.7.1 und 7.2.1 auch 11.B und 11.D. Ist Y_f der zu f gehörige Bildraum und setzen wir $\mathcal{A}_f := \text{Kon}(Y_f)$ für jedes $f \in F$, so ist nach 9.1 auch 11.C erfüllt. $\text{Uko}(X) := \bigcap_{f \in F} \mathcal{A}_f \subset \text{Kon}(X)$ nennen wir das System der ultrakonvexen Mengen in X und für jedes $B \subset X$ heißt $\bigcap_{f \in F} f^{-1}(f(B)_{\text{Kon}(Y_f)})$, also die $\text{Uko}(X)$ -Hülle von B auch die ultrakonvexe Hülle von B . Für diesen neuen Hüllenbegriff folgt nun mit 5.3.2 und 4.6.1

11.7 (vgl. N.Bourbaki [7, S.160, exerc.33, d]):

12.4.1 Satz: Ist X ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer konvex-trennbaren, translationsinvarianten Topologie und ist A eine kompakte T_0 -Teilmenge von X , dann haben $\text{ext}(A)_a$ und A dieselbe ultrakonvexe Hülle.

Nun sei X sogar ein lokal-konvexer topologischer $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Aus 12.2.1 leitet man dann leicht $\text{Uko}(X) \supset \text{Kon}(X)_a$ her, es gilt also auch $\text{Uko}(X) \supset \text{Kon}(X)$. Mit 8.14 folgt aus 12.4.1 nun 10.7.3.2 (für den hiesigen Spezial-

fall). Das heißt also, daß 12.4.1 eine Verschärfung des üblichen Satzes von Krein-Milman ist. Dies zeigt auch das Folgende:

Ist X ein lokal-konvexer, hausdorffscher topologischer $\mathbb{R}$ -Vektorraum und ist A eine kompakte, konvexe Teilmenge von X , so gilt stets $\text{ext}(A)_{\text{Kon}(X)_a} = A$, im allgemeinen nicht $\text{ext}(A)_{\text{Kon}(X)} = A$, wohl aber noch $\text{ext}(A)_{\text{Uko}(X)} = A$, obwohl die ultrakonvexe Hülle einer Menge stets zwischen der konvexen Hülle und der abgeschlossen-konvexen Hülle liegt. (N.Bourbaki gibt in [7, S.160, exerc.33, e] ein Beispiel für eine Menge B an, für die $B_{\text{Kon}(X)} \neq B_{\text{Uko}(X)} \neq B_{\text{Kon}(X)_a}$ gilt.)

12.5 F-Seiten, F-Ecken, F-Ränder und F-Hüllen

X sei eine Menge, A eine nicht leere, mit einer kompakten Topologie versehene Teilmenge von X und F eine Menge von Abbildungen von X in totalgeordnete Mengen, so daß jedes $f \in F$ in A nach unten halbstetig ist. 11.F ist erfüllt; wenn man die $\mathcal{A}_f$ aus 11.17 nimmt, gilt auch 11.G. Aus 11.12 folgt:

12.5.1 Lemma: Wenn ein $B \subset A$ jede F -Seite von A trifft, dann ist es ein F -Rand von A .

Aus 11.13 folgt:

12.5.2 Lemma: Wenn ein $B \subset A$ jede F -Ecke von A trifft, dann ist es ein F -Rand von A .

Nehmen wir dagegen das System der $\mathcal{A}_f$ aus 11.18, dann ist auch wieder 11.G erfüllt und aus 11.12 folgt (vgl. 12.2.2):

12.5.3 Lemma: Wenn ein $B \subset A$ jede F -Seite von A trifft, dann hat es dieselbe F -Hülle wie A .

Schließlich folgt aus 11.13 ein Analogon zu 12.2.3 (vgl. K.Fan [15, S.217, th.6, Teil 1]):

12.5.4 Lemma: Wenn ein $B \subset A$ jede F -Ecke von A trifft, dann hat es dieselbe F -Hülle wie A .

12.6 Minimalstellen konkaver Funktionen

Bei Zugrundelegung der Bezeichnungen aus 1.5 und 3.3 sind die konkaven Funktionen nach 7.5.1 zulässig. Mit dem System der $\mathcal{A}_T$ aus 11.17, mit 5.3.2 und 11.17.1 folgt dann aus 11.15 die Verallgemeinerung eines bekannten Ergebnisses (vgl. N.Bourbaki [7, S.106, prop.1]):

12.6.1 Satz: Ist ein Vektorraum X über einem archimedisch geordneten Körper mit einer konvextrennbaren, translationsinvarianten Topologie versehen, ist A eine kompakte, nicht leere T_0 -Teilmenge von X und f eine in A nach unten halbstetige und konkave Funktion, dann nimmt f sein Infimum in A in einem Punkt aus $\text{ext}(A)_a$ an.

Ebenso erhält man mit 11.16 (vgl. H.Bauer [2, S.392, Satz 2]):

12.6.2 Satz: Ist X ein Vektorraum über einem geordneten Körper und A eine nicht leere, mit einer kompakten Topologie versehene Teilmenge von X , deren Punkte getrennt werden durch die Menge F der in A konkaven und nach unten halbstetigen Funktionen, dann nimmt jedes $f \in F$ sein Infimum in A in einem Punkt aus $\text{ext}(A)_a$ an.

12.7 Fan-konkave Funktionen

X sei eine Menge, A eine nicht leere, mit einer kompakten Topologie versehene Teilmenge von X und E eine Menge von Abbildungen von X in total-geordnete Räume. F sei eine Menge von Abbildungen von X in totalgeordnete Räume, so daß jedes $f \in F$ in A nach unten halbstetig und E -Fan-konkav ist. (Wenn jedes $f \in F$ in A nach unten halbstetig ist, so erfüllt $F := E$ nach 7.6.2 die Voraussetzungen). Aus den Ergebnissen des § 11 folgen nun unmittelbar Sätze über Fan-konkave Funktionen. Aus 11.14 folgt mit 11.17:

12.7.1 Satz: Wenn ein $B \subset A$ jede in A minimal- E -fansche Menge trifft, dann ist es ein F -Rand von A .

Aus 11.14 ergibt sich mit 11.18 (vgl. K.Fan [15, S.217, th.6, Teil 2]):

12.7.2 Satz: Wenn ein $B \subset A$ jede in A minimal-E-fansche Menge trifft, dann hat es dieselbe F -Hülle wie A .

Mit 11.17 folgt aus 11.16 (vgl. B.Khanh [21, S.193, prop.7]):

12.7.3 Satz: Trennt F die Punkte von A , so ist $\text{fan}_E(A)_a$ ein F -Rand von A .

Mit 11.18 folgt schließlich aus 11.16 (vgl. K.Fan [15, S.216, th.4]):

12.7.4 Satz: Trennt F die Punkte von A , so hat $\text{fan}_E(A)_a$ dieselbe F -Hülle wie A .

12.8 Bauers Minimumprinzip und Verwandtes

X sei eine Menge, $\mathcal{F} \subset X \times \mathcal{P}(X)$ und A eine nicht leere, mit einer kompakten Topologie versehene Teilmenge von X . F sei eine Menge von Abbildungen von X in totalgeordnete Mengen, so daß jedes $f \in F$ in A $\mathcal{F}$ -konkav und nach unten halbstetig ist. Aus den Ergebnissen des § 11 folgen nun unmittelbar Sätze über $\mathcal{F}$ -konkave Funktionen. Aus 11.14 folgt mit 11.17:

12.8.1 Satz: Wenn ein $B \subset A$ jede in A minimal- $\mathcal{F}$ -extremale Menge trifft, dann ist es ein F -Rand von A .

Aus 11.14 ergibt sich mit 11.18:

12.8.2 Satz: Wenn ein $B \subset A$ jede minimal- $\mathcal{F}$ -extremale Menge in A trifft, dann hat es dieselbe F -Hülle wie A .

Mit 11.17 folgt aus 11.16 nun (vgl. H.Bauer [3, S.201, Satz 1]) das

12.8.3 Minimumprinzip von Bauer: Trennt F die Punkte von A , dann ist $\text{ext}_{\mathcal{F}}(A)_a$ ein F -Rand von A .

Mit 11.18 folgt schließlich aus 11.16:

12.8.4 Satz: Trennt F die Punkte von A , dann hat $\text{ext}_{\mathcal{F}}(A)_a$ dieselbe F -Hülle wie A .

12.9 Choquet-konkave Funktionen

X sei ein topologischer Raum, A eine nicht leere, kompakte Teilmenge von X und E eine Menge von Abbildungen von X in $\overline{\mathbb{R}}$. F sei eine Menge von Abbildungen von X in $\overline{\mathbb{R}}$, so daß jedes $f \in F$ in A E -Choquet-konkav ist. (Wenn jedes $f \in E$ in A

nach unten halbstetig ist und den Wert $-\infty$ nicht annimmt, so erfüllt F die Voraussetzungen.) Wegen 7.8.3 lassen sich nun mit Hilfe von 3.5.3 die Sätze von 12.8 direkt umschreiben. Aus 12.8.1 wird:

12.9.1 Satz: Wenn ein $B \subset A$ jede in A minimal-E-choquetsche Menge trifft, dann ist es ein F -Rand von A .

Satz 12.8.2 ergibt:

12.9.2 Satz: Wenn ein $B \subset A$ jede in A minimal-E-choquetsche Menge trifft, dann hat es dieselbe F -Hülle wie A .

Aus 12.8.3 folgt (vgl. H.Bauer [3, S.203, Satz 2]):

12.9.3 Satz: Trennt F die Punkte von A , dann ist $\text{cho}_E(A)_a$ ein F -Rand von A .

Schließlich ergibt 12.8.4 (vgl. M.Grossman [16, S.202, th., 3 $\Rightarrow$ 1] und E.Davies [10, S.646, th.4.1, (ii)]):

12.9.5 Satz: Trennt F die Punkte von A , dann hat $\text{cho}_E(A)_a$ dieselbe F -Hülle wie A .

12.10 Weiteste und exponierte Punkte

Zum Abschluß dieses Paragraphen werden wir nun noch einige Ergebnisse herleiten, die mit dem Satz von Krein-Milman in engem Zusammenhang stehen, wo man aber statt der Extrempunkte andere leicht charakterisierbare Punktmengen verwendet.

Ist X ein mit einer Topologie versehener $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $A \subset X$, so heißt A ein exponierter Punkt von A , wenn es eine stetige Linearform f in X gibt, daß $f(b) > f(a)$ für jedes $b \in A \setminus \{a\}$ gilt. Aus der Definition ergibt sich unmittelbar, daß für die Menge $\text{exp}(A)$ der exponierten Punkte von A gilt:

12.10.1 Lemma: Für jedes $A \subset X$ ist $\text{exp}(A) \subset \text{ext}(A)$.

Man beachte hier, daß die Extrempunkte nur von der Vektorraumstruktur von X abhängen, die exponierten Punkte aber auch noch von der Topologie.

Sei nun (X, n) ein normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Für jedes $x \in X$ und jedes $r \in \mathbb{R}_+$ bezeichne $K_r(x)$, bzw. $O_r(x)$ die abgeschlossene, bzw. offene n -Kugel mit dem Mittelpunkt x und dem Radius r . Ist $A \subset X$, so heißt $a \in A$ ein weitester Punkt von A, wenn es ein $x \in X$ und ein $r \in \mathbb{R}_+$ gibt, so daß $A \subset K_r(x)$ und $a \notin O_r(x)$ gilt, wenn also a auf der Sphäre einer abgeschlossenen Kugel liegt, die A ganz enthält. $\text{wei}(A)$ bezeichne die Menge der weitesten Punkte von A . Aus dieser Definition folgt nun unmittelbar mit einem Satz von G.Köthe [24, S.346, (1)]:

12.10.2 Lemma: Ist (X, n) ein strikt-konvexer normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $A \subset X$, so gilt $\text{wei}(A) \subset \exp(A)$.

Man beachte hier, daß die weitesten Punkte nicht nur wie die exponierten von Vektorraumstruktur und Topologie abhängen, sondern darüber hinaus sogar von der Norm, die diese Topologie erzeugt. Das ist deshalb wichtig, weil ja verschiedene Normen zur gleichen Topologie führen können.

Sei wieder (X, n) ein normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Da seine Topologie hausdorffsch ist, sind alle kompakten Teilmengen abgeschlossen. Für jedes $A \subset X$ stimmt daher die abgeschlossen-kompakt-konvexe Hülle $A_{\text{Kon}(X)_{\text{ak}}}$ überein mit der $\text{Kon}(X)_k$ -Hülle $A_{\text{Kon}(X)_k}$ von A , die wir auch kompakt-konvexe Hülle von A nennen (sie ist ja der Schnitt aller kompakten, konvexen Teilmengen von X , die A enthalten). (X, n) heißt ein flach-konvexer normierter Raum, wenn durch jeden Punkt der Einheitskugel $K_1(0) \setminus O_1(0)$ genau eine Stützhyperebene der Einheitskugel $K_1(0)$ geht. Wir zeigen nun folgenden

12.10.3 Satz: Ist (X, n) ein flach-konvexer normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum und A eine kompakte Teilmenge von X , dann haben A und $\text{wei}(A)$ dieselbe kompakt-konvexe Hülle.

Beweis: Der Fall $A = \emptyset$ ist trivial, nehmen wir nun also $A \neq \emptyset$ an. Wenn wir $F := \{x \rightarrow -n(x+a) : a \in X\}$ setzen, so gilt mit den Bezeichnungen aus 11.18 und 11.11 gerade $\mathcal{A}_F = \{\emptyset\} \cup \{K_r(a) : a \in X, r \in \mathbb{R}_+\}$. Ebenfalls sieht man unmittelbar aus der Definition von F , daß mit der Bezeichnung 11.10 gilt: $\bigcup \text{Sei}_F(A) = \text{wei}(A)$. Nach 12.5.3 haben also A und $\text{wei}(A)$ dieselbe F -Hülle, also $\mathcal{A}_F$ -Hülle,

also $\{K_r(a) : a \in X, r \in \mathbb{R}_+\}$ -Hülle. Um die Behauptung zu zeigen, genügt es wegen 8.14 zu beweisen, daß $\{K_r(a) : a \in X, r \in \mathbb{R}_+\} \supset \text{Kon}(X)_K$ gilt. Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer, kompakt und konvex und gilt $a \notin B$, so bleibt wegen 8.12 zu zeigen:

(+) Es gibt eine abgeschlossene Kugel C mit $a \notin C \supset B$.

Unter den Punkten von B habe b kleinsten Abstand von a . Nach N.Bourbaki [7, S. 83, prop.1] gibt es ein $f \in X'$ und ein $s \in \mathbb{R}$, so daß die Hyperebene $f^{-1}(s)$ die Mengen B und $O_{n(a-b)}(a)$ trennt. Also gilt $f(b) = s$. Wegen der Translationsinvarianz können wir o.B.d.A. $\frac{a+b}{2} = 0$ annehmen. Sei $D := f^{-1}(0)$ und E der durch diese Hyperebene bestimmte offene Halbraum, in dem B liegt. Gäbe es ein $c \in E$ mit $c \notin G := \bigcup_{r \in \mathbb{R}_+} O_{rn(b)}(rb)$, so möge Y den durch $0, b$ und c bestimmten zweidimensionalen Teilraum von X bezeichnen. Ist p die Restriktion der Norm n auf Y , so ist nach G.Köthe [24, S.350, (4)] auch (Y, p) flach-konvex. Wegen $c \notin G \cap Y = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_+} O_{rp(b)}(rb)$ und da $G \cap Y$ ein Kegel ist, gälte $tc \notin G \cap Y$ für alle $t \in \mathbb{R}_+^*$. Im flach-konvexen Raum (Y, p) wäre also $\mathbb{R} \cdot c$ neben $D \cap Y$ eine zweite Stützhyperebene von $K_{p(b)}(b)$ im Punkte 0 . Wegen dieses Widerspruchs gibt es gar keinen Punkt c mit der angenommenen Eigenschaft, d.h. es gilt $E \subset G$, also insbesondere $B \subset G$. $\{O_{rn(b)}(rb) : r \in \mathbb{R}_+\}$ ist also eine offene, wachsend-filtrierende Überdeckung der kompakten Menge B , es gibt also schon eine einzige Menge H aus diesem System, die B überdeckt. $C := \bar{H}$ genügt dann (+).

Als nächstes zeigen wir nun den im Falle des $\mathbb{R}^n$ schon von S.Straszewicz [33, S.140, (1)] bewiesenen

12.10.4 Satz: Ist (X, n) ein normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum und A eine kompakte

Teilmenge von X , dann haben A und $\exp(A)$ dieselbe kompakt-konvexe Hülle.

Beweis: Als kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist A separabel (siehe z.B. G.Köthe [24, S.27, (2)]). Die folgende Betrachtung können wir auf den von A erzeugten abgeschlossenen Teilraum von X einschränken. Da dieser Teilraum separabel ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß schon (X, n) separabel ist. Nach einem Satz von M.Day [11, S.519, th.4] gibt es dann eine zu n äquivalente Norm p , so daß (X, p) strikt-konvex und flach-konvex ist. Nach 12.10.3 haben A

und die Menge $\text{wei}(A)$ der bezüglich p weitesten Punkte von A dieselbe kompakt-konvexe Hülle. Wegen 12.10.2 und 8.5 haben auch A und die nur von der Topologie (nicht von der Norm) abhängende Menge $\text{exp}(A)$ dieselbe kompakt-konvexe Hülle. Damit ist die Behauptung gezeigt.

In einem normierten Raum stimmen für eine Teilmenge B , die in einer kompakten, konvexen Menge enthalten ist, kompakt-konvexe und abgeschlossen-konvexe Hülle überein. Aus 12.10.3 folgt daher nun folgender Satz, den G.Orland [28, S.78, lemma 3] für den $\mathbb{R}^2$ mit seiner euklidischen Norm, und S.Berberian [5, S.703] für den darüber hinausgehenden Spezialfall separierter Prähilberträume bewiesen hat:

12.10.5 Satz: Ist (X, n) ein flach-konvexer $\mathbb{R}$ -Vektorraum und A eine kompakte, konvexe Teilmenge von X , dann ist die abgeschlossen-konvexe Hülle von $\text{wei}(A)$ gerade wieder A .

Ebenso wird aus 12.10.4 ein Satz von V.Klee [23, S.91, 2.1], der ein entsprechendes Ergebnis für den $\mathbb{R}^n$ von S.Straszewicz [33, S.140, (2)] verallgemeinert:

12.10.6 Satz von Klee: Ist (X, n) ein normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum und A eine kompakte, konvexe Teilmenge von X , dann ist die abgeschlossen-konvexe Hülle von $\text{exp}(A)$ gerade wieder A .

Für jeden normierten Raum stellt 12.10.6 wegen 12.10.1 eine Verschärfung des Satzes von Krein-Milman dar (und 12.10.4 eine Verschärfung von 10.7.3.2). Wenn der Raum strikt-konvex und flach-konvex ist, dann wird der Satz von Klee nach 12.10.2 noch durch 12.10.5 verschärft (und 12.10.4 wird durch 12.10.3 verschärft). Daß dies beide Male wirkliche Verschärfungen sind, zeigt ein abschließendes

12.10.7 Beispiel: Wir betrachten den $\mathbb{R}^2$ mit seiner euklidischen Norm. Durch die x, y -Koordinaten definieren wir nun folgende Mengen und Punkte:

$$B := \{(x, 1) : -1 < x < 1\},$$

$$C := \{(x, \sqrt[3]{1+(1-x)^3}) : 1 < x < 2\},$$

$$D := \{(x, -\sqrt[3]{1+(1-x)^3}) : 1 < x < 2\},$$

$$E := \{(x, -1) : -1 < x < 1\},$$

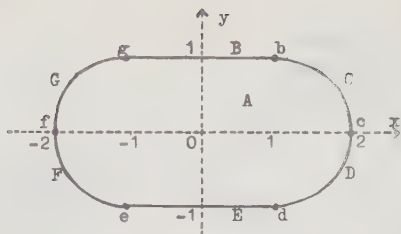
$$F := \{(x, -\sqrt[3]{1+(1+x)^3}) : -2 < x < -1\},$$

$$G := \{(x, \sqrt[3]{1+(1+x)^3}) : -2 < x < -1\},$$

$$b := (1, 1), c := (2, 0), d := (1, -1), e := (-1, -1), f := (-2, 0) \text{ und } g := (-1, 1).$$

Sei $H := B \cup C \cup D \cup E \cup F \cup G$ und A das abgeschlossene Gebiet im $\mathbb{R}^2$, das durch die sechs Bögen B, C, D, E, F und G eingeschlossen wird. Man sieht nun leicht (beachte, daß die Randkurve bei c und f die Krümmung 0 hat):

$$\text{ext}(A) = H \cup \{b, c, d, e, f, g\}, \quad \text{exp}(A) = H \cup \{c, f\}, \quad \text{wei}(A) = H.$$



Bezeichnungen

	Seite		Seite		Seite
$A_{\mathcal{A}}$	42	$\exp(A)$	73	R_+	10
$\mathcal{A}_a$	21	$\text{Ext}(A)$	9	R_+^*	7
$\mathcal{A}_A$	21	$\text{Ext}_{\mathcal{F}}(A)$	17	$\overline{R}$	18
$\mathcal{A}_F$	60, 63	$\text{Fal}(A)$	5	$R_{\mathcal{F}}$	17
$\mathcal{A}_k$	53	$\text{Fan}_F(A)$	11	R_X^X	10
$\mathcal{A}_M$	33	$f(x)$	33	R_X^K	8
$\mathcal{A}_m$	21	$\text{Int}(A)$	10	R_X^B	9
$\mathcal{A}_O$	21	$\text{Kon}(A)$	9	R_X°	11
$\mathcal{A}_s$	60	$K_r(x)$	74	R_X^{top}	19
$\text{Att}(R, M, A)$	13	$\max(A)$	5	$R_X^=$	15
$\text{Cho}_F(A)$	18	$\text{Mex}(A)$	9	$\text{Sei}_{\mathcal{F}}(A)$	60, 63
$\text{Eck}_F(A)$	60, 63	$\min(A)$	5	$\mathcal{Y}$	45
$]a, b[_A$	6	$\text{Mko}(A)$	9	$t_+(X)$	33
$[a, b]_A$	6	N	7	$\text{Tr}(w)$	18
$]a, b[_A$	6	N^*	7	$\text{Uko}(A)$	69
$[a, b]_A$	6	$O_r(x)$	74	$\text{Wac}(A)$	5
$]a, \rightarrow[_A$	6	$\mathcal{P}(X)$	12	$\text{wei}(A)$	74
$[a, \rightarrow]_A$	6	$\text{Rep}(R, M, A)$	13	$w(x)$	18
$]\leftarrow, b]_A$	6	R_F	11	x_M	12
$]\leftarrow, b[_A$	6				

Stichwortregister

	Seite		Seite
abgeschlossen-kompakt-		geordnete Menge	5
N-attraktive Hülle	53	Hülle	42
abgeschlossen-N-attraktive		$\cap$ -induktiv	22
Hülle	53	intervallartig	10
antisymmetrisch	5	invariant	7
attraktiv	12	isoton	37
attraktive Hülle	44	kompakt	15
Bahn	7	kompakt-konvexe Hülle	74
brauchbar	45	Komponente	12
brav	35	konkav	38
Choquet-konkav	40	kontinuierliche Strömung	8
choquetsch	18	kontrahierende Abbildung	25
dezisiv	5	konvex	8
diskrete Strömung	7	lokal-M-attraktiv	23
dreistellige Relation	8	M-attraktiv-invertierend	23
Ecke	60, 63	M-attraktiv-reduzierend	23
endlich-offene Topologie	31	M-attraktiv-trennbar	23
exponierter Punkt	73	maximal	5
extremal	8	metrisch-extremal	7
fallend	5	metrisch-konvex	7
fallend-abgeschlossen	25	minimal	5
Fan-konkav	39	minimal-M-attraktiv	22
fansch	11	multiplikationsstabil	11
F-Hülle	65	nach unten erblich	23
flach-konvex	74	offen-N-attraktive Hülle	53
F-Rand	62, 64	periodischer Punkt	7

	Seite		Seite
prägeordnete Menge	5	Transformationsmenge	7
Primelement	11	transitiv	5
Rand	42	Treffer	21
reflexiv	5	treu	33
Relation	12	Tupel	12
repulsiv	13	T_0 -Menge	15
R-extremal	8	T_1 -Menge	15
R-konvex	8	T_2 -Menge	15
R-zwischen	8	ultrakonvexe Hülle	69
Seite	60, 63	ultrakonvexe Menge	69
stärker	45	wachsend	5
strikt-konvex	10	wachsend-abgeschlossen	25
Strömung	7	$\mathcal{H}$ -wachsend-filtrierend	12
$\mathcal{V}$ -extremal	17	weitester Punkt	74
$\mathcal{V}$ -konkav	40	Zerlegungstripel	12
totalgeordnete Menge	5	zulässig	34
Transformationshalbgruppe	7	zweistellige Relation	5

Literatur

- [1] H.Bauer: Konvexität in topologischen Vektorräumen. Skriptum der Universität Hamburg, 1964.
- [2] H.Bauer: Minimalstellen von Funktionen und Extrempunkte. Arch.Math. 9 (1958), 389-393.
- [3] H.Bauer: Minimalstellen von Funktionen und Extrempunkte, II. Arch.Math. 11 (1960), 200-205.
- [4] H.Bauer: Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem. Ann.Inst.Fourier 11 (1961), 89-136.
- [5] S.Berberian: Compact sets in inner product spaces. Amer.Math.Monthly 74 (1967), 702-705.
- [6] G.Birkhoff: Lattice theory. Amer.Math.Soc.Coll.Publ. 25, New York 1948.
- [7] N.Bourbaki: Espaces vectoriels topologiques, chap. 1 et 2. Act.sci.ind. 1189, Paris 1966.
- [8] N.Bourbaki: Intégration, chap. 1, 2, 3 et 4. Act.sci.ind. 1175, Paris 1965.
- [9] E.Čech: Topological spaces. Prague 1966.
- [10] E.Davies: A generalized theory of convexity. Proc.London Math.Soc. 17 (1967), 644-652.
- [11] M.Day: Strict convexity and smoothness of normed spaces. Trans.Amer.Math.Soc. 78 (1955), 516-528.
- [12] M.Day: The spaces L^p with $0 < p < 1$. Bull.Amer.Math.Soc. 46 (1940), 816-823.
- [13] J.Dugundji: Topology. Boston 1966.
- [14] D.Edwards: Minimum-stable wedges of semicontinuous functions. Math.Scand. 19 (1966), 15-26.
- [15] K.Fan: On the Krein-Milman theorem. Proc.Symp.Puise Math., vol.7, Convexity, Amer.Math.Soc. (1963), 211-219.

- [16] M.Grossman: Relations of a paper of Ky Fan to a theorem of Krein-Milman type. Math.Zeitschr. 90 (1965), 212-214.
- [17] M.Grossman: Relative Choquet and Šilov boundaries. J.Reine Angew.Math. 225 (1967), 1-29.
- [18] R.Gunning and H.Rossi: Analytic functions of several complex variables. London - Sidney - Toronto - New Delhi - Tokyo 1965.
- [19] K.Jacobs: Lecture notes on ergodic theory, I. Skriptum der Aarhus Universitet, 1962/63.
- [20] S.Kakutani and V.Klee: The finite topology of a linear space. Arch.Math. 14. (1963).
- [21] B.Khanh: Sur la Φ -convexité de Ky Fan. J.Math.Anal.Appl. 20 (1967), 188-193.
- [22] V.Klee: Convex sets in linear spaces. Duke Math.J. 18 (1951), 443-466.
- [23] V.Klee: Extremal structures of convex sets, II. Math.Zeitschr. 69 (1958), 90-104.
- [24] G.Köthe: Topologische lineare Räume, I. Berlin - Göttingen - Heidelberg 1960.
- [25] K.Menger: Untersuchungen über allgemeine Metrik. Math.Annalen 100 (1928), 75-163.
- [26] H.Minkowski: Gesammelte Abhandlungen, II. Leipzig - Berlin 1911.
- [27] L.Nachbin: Topology and order. Van Nostrand Mathematical Studies 4, Princeton - New Jersey - Toronto - New York - London 1965.
- [28] G.Orland: On a class of operators. Proc.Amer.Math.Soc. 15 (1964), 75-79.
- [29] R.Phelps: Lectures on Choquet's theorem. Van Nostrand Mathematical Studies 7, Princeton - New Jersey - Toronto - New York - London 1966.
- [30] W.Rinow: Die innere Geometrie der metrischen Räume. Berlin - Göttingen - Heidelberg 1960.
- [31] H.Schaefer: Topological vector spaces. New York - London 1966.

- [32] G.Simmons: Introduction to topology and modern analysis. New York - San Francisco - Toronto - London - Tokyo 1963.
- [33] S.Straszewicz: Über exponierte Punkte abgeschlossener Punktmengen. Fund. Math. 24 (1935), 139-143.
- [34] A.Wallace: A fixed-point theorem. Bull.Amer.Math.Soc. 51 (1945), 413-416.
- [35] K.Yosida: Functional analysis. Berlin - Göttingen - Heidelberg 1965.

Lebenslauf

Am 19. Mai 1942 kam ich in Ludwigshafen am Rhein als zweites von vier Kindern des Chemikers Dr. Heinrich Pasedach und seiner Frau Katharina geb. Poeverlein zur Welt. In den Jahren 1945 bis 1948 wohnten wir in Harxheim (Kreis Kirchheimbolanden), wo ich 1948 in die Volksschule kam. Nachdem wir Ende 1948 wieder nach Ludwigshafen gezogen waren, besuchte ich dort die Wittelsbachschule und ab 1952 das mathematisch-naturwissenschaftliche Gymnasium an der Leuschnerstraße. 1961 legte ich dort das Abitur ab. Daraufhin begann ich das Studium der Mathematik (Nebenfach Physik) an der Universität in Freiburg im Breisgau. Seit Frühjahr 1962 wurde ich von der Studienstiftung des deutschen Volkes gefördert. Nachdem ich im fünften Semester im Sommer 1963 die Vordiplomprüfung abgelegt hatte, wechselte ich von Freiburg an die Universität Hamburg. Dort hörte ich vor allem Vorlesungen der Professoren L.Collatz und H.Bauer. Letzterem folgte ich dann im Herbst 1965 nach Erlangen, wo ich im Dezember 1966 die Diplomhauptprüfung ablegte; das Thema meiner Examensarbeit lautete "Zahme Maße und ihre Anwendung auf die Integration im Hilbert-Raum".

Offsetdruck - Fotodruck

Josef Hognl

8520 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz.) Tel. 22990

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 852 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990
